SAMARBEIDSOPPGAVER S14
MA1202/6202

Første time

Oppgave 1. Hva er

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{1000} ?$$

Husk: Det er lett å regne ut potenser av diagonale matriser!

Oppgave 2. La M være ei diagonaliserbar matrise over $\mathbb{R}$ med 0 og 1 som sine eneste egenverdier.

Finn et pent uttrykk for M^k for hver $k \geq 1$.

Oppgave 3. La f være en lineær operator på et endeligdimensjonalt vektorrom V. Vis at de følgende utsagnene er ekvivalente.

(i) λ er en egenverdi for f;

(ii) den lineære operatoren $f - \lambda \cdot \mathsf{id}_V$ på V er ikke injektiv;

(iii) den lineære operatoren $f - \lambda \cdot \mathsf{id}_V$ på V er ikke surjektiv; og

(iv) den lineære operatoren $f - \lambda \cdot \mathsf{id}_V$ på V er ikke inverterbar.

Oppgave 4. La f være en lineær operator på et $\mathbb{R}$-vektorrom V. Husk at vi skriver

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ kopier av } f} \colon V \longrightarrow V.$$

(a) Vis at 9 er en egenverdi for operatoren f^2 hvis og bare hvis 3 eller -3 er en egenverdi for f.

(b) Vis at hvis $f^2 = \mathsf{id}_V$ og -1 *ikke* er en egenverdi for f, så er $f = \mathsf{id}_V$.

(c) Anta at det finnes et naturlig tall n slik at f^n er null-operatoren på V. Vis at operatoren $\mathsf{id}_V - f$ er inverterbar.

Merk: Vi beviste resultatet i (c) i samarbeidsoppgavene S12, men her skal du ikke referere til den oppgaven. (*Hint*: Bruk heller Oppgave 3 fra over; kan f ha 1 som egenverdi?)

Andre time

Husk: I samarbeidsoppgavene S9 definerte vi *determinanten* til en lineær operator f på et endeligdimensjonalt vektorrom V som

$$\mathsf{det}(f) = \mathsf{det}([f]_\beta),$$

altså determinanten til matrisa $[f]_\beta$ hvor $\beta \subset V$ er en hvilken som helst ordna basis.

Oppgave 5. Vis at determinanten er produktet av egenverdiene.

Det vil si, la f være en lineær operator på et endeligdimensjonalt $\mathbb{C}$-vektorrom og la $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ være egenverdiene til f (her er $\lambda_i \neq \lambda_j$ når $i \neq j$). Vis at

$$\mathsf{det}(f) = \lambda_1^{m_1} \cdot \lambda_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_t^{m_t}$$

hvor m_i er den algebraiske multiplisiteten til egenverdien λ_i.

Oppgave 6. I hvert av de følgende tilfellene, er A inverterbar? Forklar hvorfor.

(a) A er ei 5×5-matrise over $\mathbb{C}$ med egenverdiene 1, i, -1, $-i$, og 0.

(b) A er ei 3×3-matrise over $\mathbb{C}$ med egenverdiene i, $-i$, -1.

Oppgave 7. For de matrisene A fra Oppgave 6 som er inverterbare, skriv A^{-1} som en lineærkombinasjon av ikke-negative potenser av A selv.

Mer, mer, mer!

Oppgave 8. La V være et komplekst vektorrom og la f være en lineær operator på V som ikke har noen egenverdier.

Vis at hvis et underrom $U \subset V$ er f-invariant, så er enten U uendeligdimensjonalt eller $U = \{\bar{0}\}$.

Oppgave 9. La U være et underrom av et endeligdimensjonalt vektorrom V. Bevis eller motbevis det følgende utsagnet.

Hvis U er invariant under enhver lineær operator på V, så er $U = \{\bar{0}\}$ eller $U = V$.

Oppgave 10. La f være en lineær operator på et komplekst vektorrom V med $\dim V < \infty$. La $\bar{0} \neq \bar{v} \in V$ og la $p \in \mathbb{C}[x]$ være et ikke-null polynom av minimal grad med egenskapen at $p(f)(\bar{v}) = \bar{0}$.

Vis hver rot $\lambda \in \mathbb{C}$ i polynomet p er en egenverdi for f.