SAMARBEIDSOPPGAVER S13
MA1202/6202

Første time

Oppgave 1. La A være en 8×8-matrise med karakteristisk polynom

$$x^2(x-1)(x-2)^3(x+1)^2.$$

(a) Hva er egenverdiene til A?

(b) Hva er de mulige dimensjonene til egenrommene til A?

Oppgave 2. La f være en lineær operator på et endeligdimensjonalt vektorrom V. Vis at hvis f har $\dim V$ distinkte egenverdier, så er f diagonaliserbar.

Oppgave 3. Avgjør om matrisa

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

er diagonaliserbar (du trenger ikke å diagonalisere A, selv om det skulle være mulig).

Oppgave 4. La

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Er B diagonaliserbar? Hvis svaret er ja, finn ei matrise som diagonaliserer B.

Andre time

Oppgave 5. La

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Er B diagonaliserbar? Hvis svaret er ja, finn ei matrise som diagonaliserer A.

Oppgave 6. Avgjør om operatoren $t\colon \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ gitt ved

$$t(z_1, z_2) = (z_2, 0)$$

er diagonaliserbar.

Oppgave 7. Avgjør om derivasjonsoperatoren D på vektorrommet $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, altså

$$D(p) = p' \text{ for hvert polynom } p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2},$$

er diagonaliserbar.

Oppgave 8. La $s\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ være lineæroperatoren bestemt av

$$s(\bar{e}_1) = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_3, \quad s(\bar{e}_2) = 3\bar{e}_2 \quad \text{og} \quad s(\bar{e}_3) = 3\bar{e}_3,$$

hvor $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ er standardbasisen for $\mathbb{R}^3$ (à la samarbeidsoppgavene S6.6–S6.8).

Er s diagonaliserbar? Diagonalisér i så fall s (det vil si, finn en ordna basis α for $\mathbb{R}^3$ slik at matrisa $[s]_\alpha$ er diagonal).

Mer, mer, mer!

Oppgave 9. La f være en lineær operator på et endeligdimensjonalt vektorrom V, og la $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$ være egenverdiene for f (her er $\lambda_i \neq \lambda_j$ for $i \neq j$).

(a) For hver $1 \leq i \leq n$, la β_i være en lineært uavhengig delmengde i egenrommet E_{λ_i}. Vis at unionen $\beta_1 \cup \ldots \cup \beta_n$ er lineært uavhengig i V.

(b) Vis at f er diagonaliserbar $\iff$ $\mathsf{dim}\, V = \mathsf{dim}\, E_{\lambda_1} + \ldots + \mathsf{dim}\, E_{\lambda_n}$.

Oppgave 10. Gi et eksempel på et vektorrom V med en ordna basis β og en lineær operator $f\colon V \longrightarrow V$ slik at

(a) matrisa $[f]_\beta$ har utelukkende 0 på diagonalen og f er inverterbar; og

(b) matrisa $[f]_\beta$ har utelukkende 1 på diagonalen og f er ikke inverterbar.