SAMARBEIDSOPPGAVER S12
MA1202/6202

FØRSTE TIME

Oppgave 1. Her skal vi jobbe med matrisa
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Verifiser Cayley–Hamilton-teoremet for A. Det vil si
- finn det karakteristiske polynomet $\mathsf{charpol}_A(x) \in \mathbb{R}[x]$ og
- sjekk at $\mathsf{charpol}_A(A) = 0$.

La nå $s(x) = x^5 - 4x^4 - 7x^3 + 11x^2 - x - 10 \in \mathbb{R}[x]$.

(b) Finn matrisa $s(A)$.

Oppgave 2. Bruk Cayley–Hamilton-teoremet til å finne inversen til matrisa
$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ -6 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 3. La
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Bruk Cayley–Hamilton-teoremet til å regne ut og forenkle uttrykket
$$-B^3 + 4B^2 + 3B - 4I_{3\times 3}.$$

Oppgave 4. Bevis — ved eksplisitt utregning — Cayley–Hamilton-teoremet for

(a) diagonale matriser og

(b) (2×2)-matriser.

Andre time

Husk: Hvis $f\colon V \longrightarrow V$ er en lineær operator, så er et underrom $U \subset V$ *f-invariant* eller *invariant under f* dersom $f(U) \subset U$ (altså dersom $\bar{u} \in U \implies f(\bar{u}) \in U$).

Oppgave 5. La operatoren $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være gitt ved $f(x, y) = (y, 0)$.

(a) Vis at underrommet $U = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ er invariant under f.

(b) Hva er operatoren $f|_U$ bedre kjent som?

Oppgave 6. Vi lar C^∞ være vektorrommet av alle funksjoner $\phi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ som er slik at den deriverte $\phi^{(n)}$ eksisterer og er kontinuerlig for hver $n \geq 0$. For hver $r \in \mathbb{R}$, la $\phi_r\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ være funksjonen gitt ved $\phi_r(x) = re^x$ og skriv

$$W = \{\phi_r \mid r \in \mathbb{R}\} \subset C^\infty.$$

(a) Vis at W er et underrom av C^∞.

(b) Hva er dimensjonen til vektorrommet W?

La $D\colon C^\infty \longrightarrow C^\infty$ være den lineære operatoren gitt ved derivasjon.

(c) Vis at W er D-invariant.

(d) Hva er operatoren $D|_W$ bedre kjent som?

Oppgave 7. La $f\colon V \longrightarrow V$ være en lineær operator på et vektorrom V med underrom U og W. Husk at da blir snittet $U \cap W \subset V$ også et underrom.

Vis at hvis U og W er f-invariante, så er også $U \cap W$ invariant under f.

Oppgave 8. La f være en lineær operator på et vektorrom V. Vis at

$$f \text{ har en egenverdi} \iff V \text{ har et 1-dimensjonalt underrom som er } f\text{-invariant.}$$

Oppgave 9. La $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ være den lineære operatoren gitt ved

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots, nx_n).$$

Finn alle de 1-dimensjonale underrommene av $\mathbb{R}^n$ som er f-invariante.

MER, MER, MER!

Oppgave 10. La f være en lineær operator på et vektorrom V og la $U \subset V$ være et underrom.

(a) Vis at hvis $U \subset \mathsf{Ker}\, f$, så er U invariant under f.

(b) Vis at hvis $\mathsf{Im}\, f \subset U$, så er U invariant under f.

Oppgave 11. La f og g være lineære operatorer på et vektorrom V, og anta at $f \circ g = g \circ f$.

(a) Vis at underrommet $\mathsf{Ker}\, f \subset V$ er invariant under g.

(b) Vis at underrommet $\mathsf{Im}\, f \subset V$ er invariant under g.

Oppgave 12. La f være en lineær operator på et vektorrom V og anta at det finnes et naturlig tall n slik at $f^n = 0$.

Vis at operatoren $\mathsf{id}_V - f \colon V \longrightarrow V$ er inverterbar.

Hint: Hva er $\frac{1}{1-x}$ når $|x| < 1$?

Oppgave 13. La f være en lineær operator på et vektorrom V og la $\bar{0} \neq \bar{v} \in V$.

Husk: Underrommet $U_{\bar{v}}$ av V er definert som

$$U = \mathsf{span}\left(\bar{v},\, f(\bar{v}),\, f^2(\bar{v}),\, \ldots,\, f^i(\bar{v}),\, \ldots\right) \subset V.$$

a) Vis at underrommet $U_{\bar{v}}$ er f-invariant.

b) Vis at $U_{\bar{v}}$ er det minste f-invariante underrommet av V som inneholder $\bar{v}$.