SAMARBEIDSOPPGAVER S11
MA1202/6202

Første time

Oppgave 1. Se på den lineære operatoren $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_2, 0, 5x_3).$$

(a) Finn egenverdiene til f.

(b) For hver av egenverdiene til f, finn en tilhørende egenvektor.

Oppgave 2. La $f\colon \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ være den lineære operatoren gitt ved

$$f(x,\, y) = (-y,\, x) \text{ for hver } (x,\, y) \in \mathbb{C}^2.$$

Husk fra forelesning V11 at i og $-i$ er egenverdier for f.

(a) Kan f ha flere egenverdier enn $\pm i$? Hvorfor (ikke)?

(b) Finn en egenvektor tilhørende hver av egenverdiene til f.

Oppgave 3. Se på den lineære operatoren $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gitt ved

$$f(x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots,\, x_n) = (x_1,\, 2x_2,\, 3x_3,\, \ldots,\, nx_n).$$

(a) Finn egenverdiene til f.

(b) For hver av egenverdiene til f, finn en tilhørende egenvektor.

Oppgave 4. La f være en lineær operator på et $\mathbb{R}$-vektorrom V.

(a) Vis at 0 er en egenverdi for f hvis og bare hvis $\mathsf{Ker}\, f \neq \{\bar{0}\}$.

Anta nå at f er inverterbar.

(b) Vis at $\lambda \in \mathbb{R}$ er en egenverdi for f hvis og bare hvis $\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}$ er en egenverdi for den lineære operatoren f^{-1}.

(c) Vis at f og f^{-1} har de samme egenvektorene.

Andre time

Oppgave 5. Vis at distinkte egenverdier har distinkte egenvektorer.

Det vil si, la f være en lineær operator på et reelt vektorrom V og la $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ være egenverdier for f med respektive egenvektorer $\bar{v}_\lambda, \bar{v}_\mu \in V$. Vis at

$$\lambda \neq \mu \implies \bar{v}_\lambda \neq \bar{v}_\mu.$$

NB! Dette følger selvsagt fra vår Proposisjon fra forelesning E11, men i denne oppgaven er det *ikke* meningen at du skal referere til det resultatet.

Oppgave 6. **Husk:** Vektorrommet $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ er bare en følge av reelle tall, altså

$$\mathbb{R}^\mathbb{N} = \{(r_1, r_2, r_3, \dots) \mid r_i \in \mathbb{R}\},$$

og både addisjon og skalarmultiplikasjon foregår her *komponentvis*.

Se på den lineære operatoren $s\colon \mathbb{R}^\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^\mathbb{N}$ gitt ved

$$s(r_1, r_2, r_3, \dots) = (r_2, r_3, r_4, \dots).$$

(a) Vis at hver $\lambda \in \mathbb{R}$ er en egenverdi for s.

Se nå på den lineære operatoren $t\colon \mathbb{R}^\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^\mathbb{N}$ gitt ved

$$t(r_1, r_2, r_3, \dots) = (0, r_1, r_2, r_3, \dots).$$

(b) Vis at t ikke har noen egenverdier.

Oppgave 7. Vis at similære matriser har det samme karakteristiske polynomet.

Det vil si, la A og B være reelle (eller komplekse) $n \times n$-matriser og anta at det finnes en inverterbar matrise Q slik at $Q^{-1}AQ = B$. Vis at $\mathsf{charpol}(A) = \mathsf{charpol}(B)$.

Mer, mer, mer!

Oppgave 8. La V være et endeligdimensjonalt vektorrom over $\mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) med en lineær operator $f\colon V \longrightarrow V$, og la $\lambda \in \mathbb{R}$ (hhv. $\lambda \in \mathbb{C}$).

Vis at det finnes en $\alpha \in \mathbb{R}$ (hhv. $\alpha \in \mathbb{C}$) som er slik at

$$|\alpha - \lambda| < \frac{1}{1000} \quad \text{og lineæroperatoren } f - \alpha \cdot \mathsf{id}_V \colon V \longrightarrow V \text{ er inverterbar.}$$

Oppgave 9. La $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ være (distinkte) reelle tall. Vis at i vektorrommet $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ er delmengden $\{e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}\}$ lineært uavhengig.

Hint: Finn egenverdiene og egenvektorene for operatoren på $\mathsf{span}(e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x})$ gitt ved derivasjon.

Oppgave 10. Finn en lineær operator på $\mathbb{R}^4$ som ikke har noen reelle egenverdier.