SAMARBEIDSOPPGAVER S10
MA1202/6202

Oppgave 1. Finn den generelle løsningen av differensialligninga

$$y'''' - y''' - 3y'' + y' + 2y = 0.$$

Oppgave 2. Finn den generelle løsningen av differensialligninga

$$y'' - 3y' + 2y = 0,$$

og finn deretter en løsning som tilfredsstiller

$$y(0) = 0 \text{ og } y'(0) = 1.$$

Oppgave 3. For hver av de følgende ligningene, finn den generelle løsningen.

a) $y'' + y = 0$

b) $y'' + 2y' + 5y = 0$

c) $y''' + y = 0$

Oppgave 4.

a) La p være et polynom med reelle koeffisienter.

Vis at hvis $z \in \mathbb{C}$ er en rot i p, så er den komplekskonjugerte $\bar{z}$ også en rot i p. Det vil si, vis at hvis $p(z) = 0$, så er også $p(\bar{z}) = 0$.

b) La $a, b \in \mathbb{R}$ og la $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Vis at det finnes komplekse tall c_3 og c_4 slik at

$$c_1 e^{(a+bi)t} + c_2 e^{(a-bi)t} = e^{at}(c_3 \cos bt + c_4 \sin bt).$$

Hint: Husk Eulers formel og prøv $c_3 = c_1 + c_2$ og $c_4 = i(c_1 - c_2)$.

c) Anta at vi har en homogen, lineær differensialligning med konstante koeffisienter hvis polynom har grad 2 og to distinkte komplekse røtter $a \pm ib$.

Vis at mengden

$$\{e^{at} \cos bt,\ e^{at} \sin bt\}$$

en basis for løsningsrommet til ligninga (husk at løsningsrommet er et vektorrom over $\mathbb{C}$).

d) For hver av de tre ligningene i Oppgave 3, skriv løsningen du fant som en lineærkombinasjon (over $\mathbb{C}$) av funksjoner med reelle funksjonsverdier.

Mer, mer, mer!

Oppgave 5 (Omfattende)**.** I denne oppgaven skal vi vise teoremet nedenfor som vi ikke rakk i forelesning V10. Vi bryter beviset opp i flere deler. Her står $D\colon C^\infty \longrightarrow C^\infty$ for den lineære operatoren gitt ved derivasjon.

Oppgave 5.1. Vis at for hver $c \in \mathbb{C}$ har kjernen til den lineære operatoren

$$(D - c \cdot \mathsf{id})\colon C^\infty \longrightarrow C^\infty$$

mengden $\{e^{ct}\}$ som basis.

Oppgave 5.2. Vis at for hver $c \in \mathbb{C}$ er den lineære operatoren

$$(D - c \cdot \mathsf{id})\colon C^\infty \longrightarrow C^\infty$$

surjektiv.

Oppgave 5.3. La V være et vektorrom og la

$$f, g\colon V \longrightarrow V$$

være lineære operatorer hvor f er surjektiv, og $\mathsf{Ker}\, f$ og $\mathsf{Ker}\, g$ er endeligdimensjonale. Vis at da er $\mathsf{Ker}(f \circ g)$ endeligdimensjonalt og

$$\mathsf{dim}(\mathsf{Ker}(f \circ g)) = \mathsf{dim}(\mathsf{Ker}(f)) + \mathsf{dim}(\mathsf{Ker}(g)).$$

Oppgave 5.4. Bruk induksjon på graden til polynomet p, og resultatene du har etablert så langt, til å gi et bevis for

Savnet Teorem. *La p være et polynom av grad n. Da er kjernen til den lineære operatoren*

$$p(D)\colon C^\infty \longrightarrow C^\infty$$

et n-dimensjonalt underrom av C^∞.