SAMARBEIDSOPPGAVER S9
MA1202/6202

Oppgave 1. Se på de ordna basisene $\beta = \{(2,2),\ (4,-1)\}$ og $\beta' = \{(1,3),\ (-1,-1)\}$ for $\mathbb{R}$-vektorrommet $\mathbb{R}^2$.

a) Finn basisbyttematrisa $M_{\beta}^{\beta'}$ fra β til β'.

b) Finn basisbyttematrisa $M_{\beta'}^{\beta}$ fra β' til β.

La $\bar{v} = (3,-5) \in \mathbb{R}^2$.

c) Finn koordinatvektoren $[\bar{v}]_{\beta}$.

d) Finn koordinatvektoren $[\bar{v}]_{\beta'}$ på to måter.

Oppgave 2. Husk at $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ er $\mathbb{R}$-vektorrommet som består av *alle* funksjoner $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Nå lar vi $\beta = \{\cos x,\ \sin x\}$ og ser på underrommet

$$V = \mathsf{span}\,(\beta) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}.$$

Merk at β er en basis for V.

a) Vis at også $\beta' = \{2\sin x + \cos x,\ 3\cos x\}$ er en basis for V.

b) Finn basisbyttematrisa $M_{\beta'}^{\beta}$ fra β' til β.

c) Finn basisbyttematrisa $M_{\beta}^{\beta'}$ fra β til β'.

La $h = 2\sin x - 5\cos x \in V$.

d) Finn koordinatvektoren $[h]_{\beta}$.

e) Finn koordinatvektoren $[h]_{\beta'}$ på to måter.

Oppgave 3. Husk at to $n \times n$-matriser A og B er *similære* hvis det finnes ei inverterbar matrise Q slik at $Q^{-1}AQ = B$.

a) Vis at similære matriser har samme determinant.

b) La V være et endeligdimensjonalt vektorrom og la $f\colon V \longrightarrow V$ være en lineær operator. Bruk a) til å definere $\mathsf{det}(f)$, altså *determinanten til* f.

Mer, mer, mer!

Oppgave 4. La V være et vektorrom med $\mathsf{dim}\, V < \infty$ og ordna basiser β og β'.

Husk I: Ei *basisbyttematrise fra β' til β* er bare ei matrise Q med egenskapen at

$$Q \cdot [\bar{v}]_{\beta'} = [\bar{v}]_{\beta} \text{ for hver } \bar{v} \in V.$$

a) Vis — uten å ty til konstruksjonen under — at basisbyttematrisa er entydig. Det vil si, vis at hvis Q og Q' er basisbyttematriser fra β' til β, så er $Q = Q'$.

Husk II: Vi har eksplisitt konstruert basisbyttematrisa fra β' til β, nemlig som matriserepresentasjonen $[\mathsf{id}_V]_{\beta'}^{\beta}$ av identitetsoperatoren på V.

b) Hvorfor er basisbyttematrisa fra β' til β inverterbar?

c) Overbevis deg selv og et annet menneske om at *inversen til basisbyttematrisa fra β' til β er lik basisbyttematrisa fra β til β'.*

Oppgave 5. La V og W være endeligdimensjonale vektorrom med ordna basiser $\beta \subset V$ og $\gamma \subset W$. Vis at hvis $f\colon V \longrightarrow W$ er en lineærtransformasjon, så er

$$[f(\bar{v})]_{\gamma} = [f]_{\beta}^{\gamma} \cdot [\bar{v}]_{\beta} \text{ for hver } \bar{v} \in V.$$