**SAMARBEIDSOPPGAVER S8**
**MA1202/6202**

## Første time

**Oppgave 1.** I hvert av de følgende tilfellene er $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ et polynom og $\beta$ er en ordna basis for $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Finn koordinatvektoren $[p]_\beta$.

a) $p = 7 - x + 2x^2$ og $\beta = \{1,\, x,\, x^2\}$

b) $p = 7 - x + 2x^2$ og $\beta = \{1 + x + x^2,\, x + x^2,\, x^2\}$

c) $p = 1 + 2x + 5x^2$ og $\beta = \{1,\, x,\, x^2\}$

d) $p = 1 + 2x + 5x^2$ og $\beta = \{1 + x,\, 1 + x^2,\, x + x^2\}$

**Oppgave 2.** I hvert av de følgende tilfellene er $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ og $\beta$ er en ordna basis for vektorrommet $\mathbb{R}^2$. Finn koordinatvektoren $[\bar{v}]_\beta$.

a) $\bar{v} = (3,\, -7)$ og $\beta = \{(1,\, 0),\, (0,\, 1)\}$

b) $\bar{v} = (3,\, -7)$ og $\beta = \{(1,\, 1),\, (0,\, 2)\}$

c) $\bar{v} = (1,\, 1)$ og $\beta = \{(1,\, 0),\, (0,\, 1)\}$

d) $\bar{v} = (1,\, 1)$ og $\beta = \{(1,\, 1),\, (0,\, 2)\}$

e) $\bar{v} = (x,\, y)$ og $\beta = \{(1,\, 0),\, (0,\, 1)\}$

f) $\bar{v} = (x,\, y)$ og $\beta = \{(1,\, 1),\, (0,\, 2)\}$

**Oppgave 3.** Løs følgende oppgave fra eksamen i 2010.

**Oppgave 4** La $C$ være vektorrommet bestående av alle kontinuerlige funksjoner på $\mathbb{R}$, og la $V$ og $W$ være underrom med basiser

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_V &= \{x, x^2, x + \sin x, \cos x\} \quad \text{(basis for } V) \\ \mathcal{B}_W &= \{1, x+4, \sin x, 2x + \cos x\} \quad \text{(basis for } W) \end{aligned}$$

(du trenger ikke å vise at $V$ og $W$ er underrom av $C$, og heller ikke at $\mathcal{B}_V$ og $\mathcal{B}_W$ tilfredsstiller kravene til å være basiser). Se på lineærtransformasjonen $T\colon V \to W$ gitt ved

$$T(f(x)) = f'(x) \quad \left(= \frac{d}{dx} f(x)\right)$$

(du trenger ikke å vise at dette er en lineær transformasjon).

**a)** Finn matrisen $[T]_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V}$ med hensyn på basisene $\mathcal{B}_V$ og $\mathcal{B}_W$. Er $T$ en isomorfi?

**b)** La $v$ være vektoren

$$v = 2x + 3x^2 + 7 \sin x$$

i $V$. Finn koordinatvektorene $[v]_{\mathcal{B}_V}$ og $[T(v)]_{\mathcal{B}_W}$.

**Oppgave 4.** La lineærtransformasjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$f(x, y) = (y, -5x + 13y, -7x + 16y).$$

a) La $\beta' \subset \mathbb{R}^2$ og $\gamma' \subset \mathbb{R}^3$ være våre standard ordna basiser. Finn matriserepresentasjonen $[f]_{\beta'}^{\gamma'}$.

b) Se nå på de ordna basisene

$$\beta = \{(3,\ 1),\ (5,\ 2)\} \text{ og } \gamma = \{(1,\ 0,\ -1),\ (-1,\ 2,\ 2),\ (0,\ 1,\ 2)\}$$

for $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$, henholdsvis. Finn matrisa $[f]_{\beta}^{\gamma}$.

## Andre time

**Oppgave 5.** Husk funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ fra forelesning V7 gitt ved

$$f(x,\, y) = (x + y,\, 2x - y).$$

a) Sjekk at $f$ er en lineærtransformasjon.

b) Finn ei matrise $A$ slik at $f = L_A$.

**Oppgave 6.** Vis at enhver lineærtransformasjon fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ er gitt ved matrisemultiplikasjon.

Det vil si, vis at hvis $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ er en lineærtransformasjon så finnes ei matrise $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ slik at $f = L_A$.

**Oppgave 7.** Nå ser vi på på lineærtransformasjonene

$$f\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 1} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \text{ gitt ved } f(p) = xp \text{ og}$$
$$g\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \text{ gitt ved } g(p) = p(3x - 5).$$

La $\beta = \{1,\, x\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ og $\gamma = \{1,\, x,\, x^2\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ være ordna basiser.

a) Finn matrisene $[f]_\beta^\gamma$ og $[g]_\gamma^\gamma$.

b) Finn matrisa $[g \circ f]_\beta^\gamma$ på to måter.

**Oppgave 8.** La $V$ være et endeligdimensjonalt vektorrom med en ordna basis $\beta$, og la $f\colon V \longrightarrow V$ være en lineær operator.

Vis at $f$ er inverterbar hvis og bare hvis matrisa $[f]_\beta$ er inverterbar.

## Mer, mer, mer!

**Oppgave 9.** La $D\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ være lineærtransformasjonen gitt ved derivasjon, altså $D(p) = p'$.

Finn en ordna basis $\beta$ for $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ og en ordna basis $\gamma$ for $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ som gir

$$[D]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Oppgave 10.** Vis at *å ta koordinatvektor* er en isomorfi.

Det vil si, la $V$ være et endeligdimensjonalt vektorrom (for eksempel over $\mathbb{R}$) med en ordna basis $\beta$ og $\dim V = n$. Vis at funksjonen

$$f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ gitt ved } f(\bar{v}) = [\bar{v}]_\beta$$

er en inverterbar lineærtransformasjon.

**Oppgave 11.** Vis at *å ta matriserepresentasjon* er en isomorfi.

Det vil si, la $V$ og $W$ være endeligdimensjonale vektorrom over $\mathbb{R}$ med ordna basiser $\beta \subset V$ og $\gamma \subset W$, og med $\dim V = n$ og $\dim W = m$. Vis at funksjonen

$$\phi\colon \mathsf{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \longrightarrow M_{m,n}(\mathbb{R}) \text{ gitt ved } \phi(f) = [f]_\beta^\gamma$$

er en inverterbar lineærtransformasjon.

**Oppgave 12.** La $V$ og $W$ være endeligdimensjonale vektorrom over $\mathbb{R}$. Hva er dimensjonen til vektorrommet $\mathsf{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$?

**Oppgave 13.** La $V$ være et vektorrom over $\mathbb{R}$.

Vis at $V$ er isomorft med vektorrommet $\mathsf{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, V)$.