SAMARBEIDSOPPGAVER S7
MA1202/6202

Første time

Oppgave 1. Avgjør om de følgende lineærtransformasjonene er isomorfier.

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved $f(x, y) = (x, x + y)$,

b) $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved $g(x, y, z) = z$,

c) $s\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gitt ved $s\left((r_1, r_2, r_3, \dots)\right) = (r_2, r_3, r_4, \dots)$, og

d) $m\colon \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ gitt ved $m(p) = x^2 p$.

Oppgave 2. La $f\colon U \longrightarrow V$ og $g\colon V \longrightarrow W$ være lineærtransformasjoner. Husk at da er funksjonen $g \circ f\colon U \longrightarrow W$ også en lineærtransformasjon.

a) Vis at hvis både f og g er inverterbare, så er $g \circ f$ inverterbar.

b) Vis at hvis $g \circ f$ er inverterbar, så er f injektiv.

c) Vis at hvis $g \circ f$ er inverterbar, så er g surjektiv.

Oppgave 3. La V være et endeligdimensjonalt vektorrom og la $f, g\colon V \longrightarrow V$ være lineære operatorer.

Vis at $g \circ f$ er inverterbar hvis og bare hvis f og g er inverterbare.

Andre time

Oppgave 4. La V og W være endeligdimensjonale vektorrom.

Vis at
$$V \cong W \iff \mathsf{dim}\, V = \mathsf{dim}\, W.$$

Oppgave 5. Se på mengden av matriser
$$U = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix} \right) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Vis at U er et underrom av $\mathbb{R}$-vektorrommet $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

Se nå på mengden av matriser
$$V = \{ \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix} \right) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \}.$$

b) Vis at V er et underrom av $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

c) Vis at vektorrommene U og V er isomorfe ved å finne en eksplisitt isomorfi $f\colon U \longrightarrow V$.

Oppgave 6. La V og W være endeligdimensjonale vektorrom og la $f\colon V \longrightarrow W$ være en lineærtransformasjon.

a) Vis at f er injektiv hvis og bare hvis det eksisterer en lineærtransformasjon $h\colon W \longrightarrow V$ slik at $h \circ f = \mathsf{id}_V$.

b) Vis at f er surjektiv hvis og bare hvis det eksisterer en lineærtransformasjon $h\colon W \longrightarrow V$ slik at $f \circ h = \mathsf{id}_W$.

Mer, mer, mer!

Oppgave 7. La V og W være endeligdimensjonale vektorrom og la $f\colon V \longrightarrow W$ være en lineærtransformasjon.

Vis at hvis f er inverterbar hvis og bare hvis f er både injektiv og surjektiv.

Oppgave 8. Se på mengden av polynomer

$$W = \{p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \mid p(1) = 0\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 2}.$$

a) Vis at W er et $\mathbb{R}$-vektorrom.

b) Vis at vektorrommene W og $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ er isomorfe ved å finne en eksplisitt isomorfi $g\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 1} \longrightarrow W$.