SAMARBEIDSOPPGAVER S6
MA1202/6202

Første time

Oppgave 1. Bestem kjernen $\mathsf{Ker}\, f$ og bildet $\mathsf{Im}\, f$ for lineærtransformasjonene

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved $f(x,y) = (x, x+y)$ og

b) $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved $g(x,y,z) = z$.

Oppgave 2. Husk den lineære operatoren $s\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gitt ved "skift mot venstre", det vil si

$$(r_1,\, r_2,\, r_3,\, \dots) \xmapsto{s} (r_2,\, r_3,\, r_4,\, \dots).$$

a) Hva er kjernen $\mathsf{Ker}\, s$ til s? Er s injektiv (i.e., 1–1)?

b) Hva er bildet $\mathsf{Im}\, s$ til s? Er s surjektiv (i.e., på)?

Oppgave 3. Husk den lineære operatoren $m\colon \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ gitt ved $m(p) = x^2 p$.

a) Hva er kjernen $\mathsf{Ker}\, m$ til m? Er m injektiv?

b) Hva er bildet $\mathsf{Im}\, m$ til m? Er m surjektiv?

Oppgave 4. La V og W være endeligdimensjonale vektorrom med $\dim V = \dim W$ og la $f\colon V \longrightarrow W$ være en lineærtransformasjon.

Vis at de følgende tre utsagnene er ekvivalente.

i) f er injektiv;

ii) f er surjektiv;

iii) $\dim \mathsf{Im}\, f = \dim W$.

ANDRE TIME

Oppgave 5. La V og W være endeligdimensjonale vektorrom og la $f: V \longrightarrow W$ være en lineærtransformasjon. Vis at

a) hvis $\dim V < \dim W$, så er f ikke surjektiv, og

b) hvis $\dim V > \dim W$, så er f ikke injektiv.

Husk: En lineærtransformasjon er entydig bestemt av sin virkning på en basis.

Det vil si at hvis V og W er vektorrom og $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\} \subset V$ er en basis, så kan *du velge deg* n vektorer

$$\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_n \in W,$$

og det vil finnes en (entydig) lineærtransformasjon $f: V \longrightarrow W$ slik at

$$f(\bar{v}_1) = \bar{w}_1, \ldots, f(\bar{v}_n) = \bar{w}_n.$$

Oppgave 6. La $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ være standardbasisen for $\mathbb{R}^2$ og *velg ut* de følgende to vektorene i $\mathbb{R}^3$:

$$(*) \qquad t(\bar{e}_1) = (1, 2, 3) \text{ og } t(\bar{e}_2) = (4, 5, 6).$$

I følge påminnelsen over finnes det nøyaktig én lineærtransformasjon $t: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ som oppfyller begge ligningene i $(*)$.

(a) Er t surjektiv?

(b) La $\bar{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ være en vilkårlig vektor. Finn et uttrykk for $t(\bar{v})$.

(c) Er t injektiv?

Oppgave 7. La $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ være standardbasisen for $\mathbb{R}^3$ og *velg*

$$(**) \qquad r(\bar{e}_1) = \bar{e}_2 + \bar{e}_3, \quad r(\bar{e}_2) = 2\bar{e}_2 \quad \text{og} \quad r(\bar{e}_3) = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 3\bar{e}_3.$$

I følge påminnelsen over finnes det da nøyaktig én lineær operator $r: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ som oppfyller hver av ligningene i $(**)$.

(a) La $\bar{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ være en vilkårlig vektor. Finn et uttrykk for $r(\bar{v})$.

(b) Er r injektiv?

(c) Er r surjektiv?

Oppgave 8. Mengden $\{(1, 0), (1, 1)\}$ er også en basis for $\mathbb{R}^2$. Nå *velger vi*

$$(***) \qquad s(1, 0) = (1, 2, 1) \in \mathbb{R}^3 \text{ og } s(1, 1) = (1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3.$$

I følge påminnelsen over finnes det nøyaktig én lineærtransformasjon

$$s: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

som oppfyller begge ligningene i $(***)$.

(a) Er s surjektiv?

(b) La $\bar{v} = (5, 2) \in \mathbb{R}^2$. Finn vektoren $s(\bar{v}) \in \mathbb{R}^3$.

Mer, mer, mer!

Oppgave 9. La $f\colon V \longrightarrow W$ være en injektiv lineærtransformasjon.

Vis at hvis $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ er lineært uavhengig i V, så er $\{f(\bar{v}_1), \dots, f(\bar{v}_n)\}$ lineært uavhengig i W.

Oppgave 10. Gi et eksempel på en lineærtransformasjon $f\colon V \longrightarrow W$ og en lineært uavhengig mengde $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ i V slik at mengden $\{f(\bar{v}_1), \dots, f(\bar{v}_n)\}$ er lineært *avhengig* i W.

Oppgave 11. La $f\colon V \longrightarrow W$ være en lineærtransformasjon.

Vis at bildet $\mathsf{Im}\, f \subset W$ er et underrom.

Oppgave 12. La $\varepsilon\colon V \longrightarrow V$ være en lineær operator. Vis at

$$\varepsilon^2 = 0 \iff \mathsf{Im}\,\varepsilon \subset \mathsf{Ker}\,\varepsilon.$$

Oppgave 13. Vis at enhver lineær operator på et 1-dimensjonalt vektorrom er gitt ved multiplikasjon med en skalar.

Det vil si, vis at hvis f er en lineær operator på et $\mathbb{R}$-vektorrom V med $\mathsf{dim}\, V = 1$, så finnes en $a \in \mathbb{R}$ som er slik at

$$f(\bar{v}) = a\bar{v} \text{ for hver } \bar{v} \in V.$$