SAMARBEIDSOPPGAVER S5
MA1202/6202

Første time

Oppgave 1. La $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være en lineærtransformasjon. Anta at

$$f\,(1,\,1,\,1) = (1,\,3) \text{ og at } f\,(0,\,1,\,0) = (2,\,5)\,.$$

Er det mulig å si hva $f(1,\,-1,\,1)$ må være? Si det i så fall!

Oppgave 2. Avgjør om de følgende funksjonene er lineærtransformasjoner.

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved $f(x,\,y) = (x,\,x+y)$.

b) $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved $g(x,\,y,\,z) = z$.

c) $h\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved $h(x,\,y) = xy$.

Oppgave 3. Husk at vektorrommet $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ består av følger av reelle tall, altså

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(r_1,\,r_2,\,r_3,\,\ldots\,) \mid r_i \in \mathbb{R}\}\,.$$

Vis at funksjonen $s\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gitt ved "skift mot venstre," det vil si

$$(r_1,\,r_2,\,r_3,\,\ldots\,) \overset{s}{\longmapsto} (r_2,\,r_3,\,r_4,\,\ldots\,),$$

er en lineær operator.

Oppgave 4. Husk at vektorrommet $\mathbb{R}[x]$ består av alle polynomer med koeffisienter fra $\mathbb{R}$. Vis at funksjonen $m\colon \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ gitt ved

$$m(p) = x^2 p$$

er en lineær operator.

Oppgave 5. La $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$f(x,y,z) = (2x - 4y + 3z + b, 6x + cxyz).$$

Vis at f er en lineærtransformasjon hvis og bare hvis $b = c = 0$.

Andre time

Oppgave 6. La $f: U \longrightarrow V$ og $g: V \longrightarrow W$ være lineærtransformasjoner. Vis at den sammensatte funksjonen

$$g \circ f: U \longrightarrow W$$

er en lineærtransformasjon.

Oppgave 7. La $f: V \longrightarrow W$ være en lineærtransformasjon. Vis at $f(\bar{0}_V) = \bar{0}_W$.

Oppgave 8. I denne oppgaven er C^∞ det reelle vektorrommet av funksjoner $\phi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ slik at den deriverte $\phi^{(n)}$ eksisterer og er kontinuerlig for hver $n \geq 0$.

Definér en funksjon $f: C^\infty \longrightarrow C^\infty$ ved

$$f(\phi)(x) = \int_0^x \phi(t)\,\mathsf{d}t \qquad \text{for hver } \phi \in C^\infty.$$

Vis at f er en lineær operator.

Oppgave 9. Gi et bevis eller et moteksempel (*men helst ikke begge deler!*):
Hvis $f, g: V \longrightarrow V$ er to lineære operatorer, så er $f \circ g = g \circ f$.

Mer, mer, mer!

Oppgave 10. La $f\colon V \longrightarrow W$ være en lineærtransformasjon.

Vis at hvis $\{f(\bar{v}_1),\,\ldots,\,f(\bar{v}_n)\}$ er lineært uavhengig i W, så er $\{\bar{v}_1,\,\ldots,\,\bar{v}_n\}$ lineært uavhengig i V.

Oppgave 11. Gi eksempel på

a) en funksjon $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ som *ikke* er en lineærtransformasjon, men likevel oppfyller
$$f(a\bar{v}) = af(\bar{v})$$
for hver $a \in \mathbb{R}$ og hver $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$, og

b) en funksjon $g\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ som *ikke* er en lineærtransformasjon, men likevel opfyller
$$g(\bar{v} + \bar{w}) = g(\bar{v}) + g(\bar{w})$$
for hver $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{C}$ (her tenker vi på $\mathbb{C}$ som et vektorrom over $\mathbb{C}$).

Oppgave 12. La $f\colon V \longrightarrow W$ være en lineærtransformasjon mellom reelle vektorrom, og la $a \in \mathbb{R}$. Vis at funksjonen
$$af\colon V \longrightarrow W \text{ gitt ved } (af)(\bar{v}) = af(\bar{v}) \text{ for hver } \bar{v} \in V$$
er en lineærtransformasjon.