SAMARBEIDSOPPGAVER S4
MA1202/6202

Første time

Oppgave 1. Se på delmengden

$$U = \{(a,\, b,\, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

a) Vis at U er et underrom av $\mathbb{R}^3$.

b) Vis at $\{(1,\, 0,\, 1),\ (0,\, 1,\, 0)\}$ er en basis for vektorrommet U.

Oppgave 2. Svar på følgende spørsmål *uten å regne ut noe som helst.*

a) Er mengden

$$\{(1,\, 2,\, 3,\, 2),\ (4,\, 5,\, 6,\, 5),\ (7,\, 8,\, 9,\, 8)\}$$

en basis for vektorrommet $\mathbb{C}^4$?

b) Er mengden

$$\{1,\, x^2 - 2,\, x^2 + 3x,\, x^2\}$$

en basis for vektorrommet $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$?

Oppgave 3. La $p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_n$ være ikke-null polynomer med reelle koeffisienter slik at

$$\mathsf{deg}(p_i) \neq \mathsf{deg}(p_j) \text{ hver gang } i \neq j.$$

Vis at mengden $\{p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_n\}$ er lineært uavhengig i vektorrommet $\mathbb{R}[x]$.

Oppgave 4. La S være en delmengde i et endeligdimensjonalt vektorrom V.

Vis at hvis S er lineært uavhengig, så kan S utvides til en basis for V.

Andre time

Oppgave 5. La $p_0, p_1, \ldots, p_n$ være polynomer med reelle koeffisienter slik at
$$\mathsf{deg}(p_i) = i \text{ for hver } i.$$
Vis at mengden $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ er en basis for vektorrommet $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$.

Hint: Bruk resultatet fra Oppgave 3.

Oppgave 6. La V være et endeligdimensjonalt vektorrom med et underrom $U \subset V$.

a) Vis at $\mathsf{dim}\, U \leq \mathsf{dim}\, V$.

b) Vis at $\mathsf{dim}\, U = \mathsf{dim}\, V$ hvis og bare hvis $U = V$.

Oppgave 7. I denne oppgaven ser vi på mengden av polynomer
$$V = \{p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \mid p'(5) = 0\}$$
hvor p' står for den deriverte av p.

a) Vis at V er et underrom av vektorrommet $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

b) Vis at $\{1,\ (x-5)^2,\ (x-5)^3\}$ er en basis for V.

Oppgave 8. La $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ være en delmengde i et endeligdimensjonalt vektorrom V med $\mathsf{dim}\, V = n$.

Vis at hvis B utspenner V, så er B en basis for V.

Mer, mer, mer!

Oppgave 9. Mengden av polynomer

$$U = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \mathsf{deg}(p) \leq 4 \text{ og } p(6) = 0\}$$

er et underrom av vektorrommet $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$.

Finn en basis for $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ som inneholder en basis for U.

Oppgave 10.

a) Vis at underrommene av vektorrommet $\mathbb{R}^2$ er nøyaktig
   - $\{\bar{0}\}$,
   - alle linjer i $\mathbb{R}^2$ gjennom origo og
   - $\mathbb{R}^2$.

b) Vis at underrommene av vektorrommet $\mathbb{R}^3$ er nøyaktig
   - $\{\bar{0}\}$,
   - alle linjer i $\mathbb{R}^3$ gjennom origo,
   - alle plan i $\mathbb{R}^3$ gjennom origo og
   - $\mathbb{R}^3$.