SAMARBEIDSOPPGAVER S2
MA1202/6202

Første time

Oppgave 1. Vis at de følgende delmengdene av $\mathbb{R}^3$ *ikke* er underrom.

a) $A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1x_2x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

b) $B = \{(x_1, x_2, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$

Oppgave 2. Avgjør om de følgende delmengdene av $\mathbb{R}^3$ er underrom.

a) $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4\}$

b) $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 5x_3\}$

Oppgave 3. Vis at delmengden

$$V_b = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = 5x_4 + b\} \subset \mathbb{R}^4$$

er et underrom av $\mathbb{R}^4$ hvis og bare hvis $b = 0$.

Oppgave 4. Løs fjerde oppgave fra eksamen i mai 2023:

> **Oppgave 4.** I denne oppgaven er V det reelle vektorrommet som består av alle funksjoner $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. For hver $a \in \mathbb{R}$ har vi delmengden
>
> $$V_a = \{f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = a\} \subset V.$$
>
> (a) Vis at $V_0 \subset V$ er et underrom (altså, at V_a er et underrom av V hvis $a = 0$).
>
> (b) Er $V_1 \subset V$ et underrom?

Husk: $\mathbb{R}[x]$ er vektorrommet av alle *polynomer med koeffisienter i* $\mathbb{R}$, altså alle uttrykk på formen

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad \text{med } a_i \in \mathbb{R}.$$

Hvert polynom $p \in \mathbb{R}[x]$ kan betraktes som en funksjon $p\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ på en naturlig måte. For eksempel, hvis $p = 5 + 3x^2$ så er $p(-4) = 5 + 3 \cdot (-4)^2 = 53$.

Oppgave 5. Avgjør om de følgende delmengdene av $\mathbb{R}[x]$ er underrom.

a) $A = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) = 0\} \subset \mathbb{R}[x]$

b) $B = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) = 5\} \subset \mathbb{R}[x]$

Oppgave 6. Husk fra samarbeidsoppgavene S1 at vi har vektorrommet $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ av *alle* følger av reelle tall, altså

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(r_1,\, r_2,\, r_3,\, \ldots) \mid r_i \in \mathbb{R}\},$$

hvor addisjon og skalarmultiplikasjon er gitt ved henholdsvis

$$(r_1,\, r_2,\, r_3,\, \ldots) + (s_1,\, s_2,\, s_3,\, \ldots) = (r_1 + s_1,\, r_2 + s_2,\, r_3 + s_3,\, \ldots) \text{ og}$$
$$a \cdot (r_1,\, r_2,\, ,r_3,\, \ldots) = (ar_1,\, ar_2,\, ,ar_3,\, \ldots).$$

Se nå på delmengden

$$\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(r_1,\, r_2,\, r_3,\, \ldots) \mid r_i \neq 0 \text{ for bare endelig mange } i\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Vis at $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ er et vektorrom over $\mathbb{R}$ ved å vise at $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ er et underrom av $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Oppgave 7. La U være en delmengde av et vektorrom V. Vis at U er et underrom hvis og bare hvis

i) $\bar{0} \in U$,

ii) $\bar{u} + \bar{w} \in U$ for hver $\bar{u}, \bar{v} \in U$, og

iii) $a\bar{u} \in U$ for hver $a \in F$ og $\bar{u} \in U$.

MER, MER, MER!

Oppgave 8. La U_1 og U_2 være underrom av et vektorrom V.

Vis at unionen $U_1 \cup U_2 \subset V$ er et underrom hvis og bare hvis $U_1 \subset U_2$ eller $U_2 \subset U_1$.

Oppgave 9. Beskriv alle underrommene av vektorrommet $\mathbb{R}^2$.

Oppgave 10. Vis at

a) mengden av alle kontinuerlige funksjoner $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ er et vektorrom, og at
b) mengden av alle deriverbare funksjoner $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ er et vektorrom.

Oppgave 11 (Filosofisk)**.** Er det noen essensiell forskjell mellom $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ og $\mathbb{R}^{n+1}$ *som vektorrom over* $\mathbb{R}$?

Oppgave 12 (For spesielt interesserte)**.** La F være en kropp og se på mengden

$$F(x) = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in F[x] \text{ og } g \neq 0 \right\}$$

av *rasjonale funksjoner*.

(1) Vi har en naturlig addisjon og skalarmultiplikasjon på $F(x)$. Overbevis deg selv om at $F(x)$ blir et vektorrom over F med disse operasjonene.
(2) Vi har også en naturlig *multiplikasjon* på $F(x)$. Overbevis deg selv om at $F(x)$ blir en kropp med denne multiplikasjonen.