SAMARBEIDSOPPGAVER S1
MA1202/6202

Første time

Oppgave 1. Løs første oppgave fra eksamen i mai 2017:

> **Oppgave 1** La V være et vektorrom. Vis, ved å bare bruke vektorrom-aksiomene (se vedlegg):
>
> **a)** Hvis $\vec{x}+\vec{y}=\vec{x}+\vec{z}$ for noen $\vec{x},\vec{y}$ og $\vec{z}$ i V, så er $\vec{y}=\vec{z}$.
>
> **b)** Hvis $\vec{x}+\vec{x}=\vec{x}$ for en $\vec{x}$ i V, så er $\vec{x}=\vec{0}$.

Her er det nevnte vedlegget:

> **Vedlegg**
>
> **Definisjon.** Et *vektorrom* V over en kropp $\mathbb{K}$ er en mengde som det er definert to operasjoner på: *vektoraddisjon*, som definerer for to elementer $\vec{x}$ og $\vec{y}$ av V et nytt element $\vec{x}+\vec{y}$, og *skalarmultiplikasjon*, som definerer for $s \in \mathbb{K}$ og et element $\vec{x} \in V$ et nytt element $s\vec{x} \in V$, slik at følgende krav er oppfylt:
>
> (VS1) For alle $\vec{x},\vec{y} \in V$ gjelder $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$.
>
> (VS2) For alle $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in V$ gjelder $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$.
>
> (VS3) Det fins et element $\vec{0}$ i V slik at $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$ for alle $\vec{x} \in V$.
>
> (VS4) For hvert element $\vec{x} \in V$ fins det et element $\vec{y} \in V$ slik at $\vec{x}+\vec{y}=\vec{0}$.
>
> (VS5) For hvert element $\vec{x} \in V$ gjelder $1\vec{x}=\vec{x}$.
>
> (VS6) For hvert par av skalarer s og t i $\mathbb{K}$ og hver $\vec{x} \in V$ gjelder $(st)\vec{x}=s(t\vec{x})$.
>
> (VS7) For hver $s \in \mathbb{K}$ og $\vec{x},\vec{y} \in V$ gjelder $s(\vec{x}+\vec{y})=s\vec{x}+s\vec{y}$.
>
> (VS8) For hver $s,t \in \mathbb{K}$ og $\vec{x} \in V$ gjelder $(s+t)\vec{x}=s\vec{x}+t\vec{x}$.

Oppgave 2. La V være et vektorrom over $\mathbb{R}$.

a) Vis at nullvektoren $\bar{0} \in V$ er entydig.

b) Vis at for hver vektor $\bar{v} \in V$ er $0 \cdot \bar{v} = \bar{0}$.

c) Vis at for hver vektor $\bar{v} \in V$ er vektoren $-\bar{v} \in V$ entydig.

d) Vis at for hver vektor $\bar{v} \in V$ er $(-1) \cdot \bar{v} = -\bar{v}$.

Oppgave 3. Mengden $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ består av alle følger av reelle tall, altså

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(r_1, r_2, r_3, \ldots) \mid r_i \in \mathbb{R}\}.$$

Denne mengden har en naturlig addisjon gitt ved

$$(r_1, r_2, r_3, \ldots) + (s_1, s_2, s_3, \ldots) = (r_1 + s_1, r_2 + s_2, r_3 + s_3, \ldots)$$

og en naturlig skalarmultiplikasjon gitt ved

$$a \cdot (r_1, r_2, , r_3, \ldots) = (ar_1, ar_2, , ar_3, \ldots)$$

for hver $a \in \mathbb{R}$.

Overbevis et annet menneske om at $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ er et vektorrom over $\mathbb{R}$.

Husk: For hver mengde S kan vi se på

$$\mathbb{R}^S = \{f \colon S \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ er en funksjon}\}.$$

Et *element* i mengden $\mathbb{R}^S$ er altså det samme som en *funksjon* fra S til $\mathbb{R}$.

- *Summen* av to funksjoner $f, g \in \mathbb{R}^S$ er funksjonen
  $$f + g \colon S \longrightarrow \mathbb{R} \text{ gitt ved } (f+g)(s) = f(s) + g(s) \text{ for hver } s \in S.$$
- *Skalarproduktet* av en funksjon $f \in \mathbb{R}^S$ med en skalar $a \in \mathbb{R}$ er funksjonen
  $$a \cdot f \colon S \longrightarrow \mathbb{R} \text{ gitt ved } (a \cdot f)(s) = af(s) \text{ for hver } s \in S.$$

Oppgave 4. La $S = \{\mathsf{Tuva}, \mathsf{Solveig}\}$ og la $f, g \colon S \longrightarrow \mathbb{R}$ være de to funksjonene definert ved de følgende reglene.

$$f(\mathsf{Tuva}) = \pi; \qquad g(\mathsf{Tuva}) = 5;$$
$$f(\mathsf{Solveig}) = -8; \qquad g(\mathsf{Solveig}) = \sqrt{2}.$$

Merk at funksjonene f og g også kan beskrives slik:

$$\mathsf{Tuva} \xmapsto{f} \pi; \qquad \mathsf{Tuva} \xmapsto{g} 5;$$
$$\mathsf{Solveig} \xmapsto{f} -8; \qquad \mathsf{Solveig} \xmapsto{g} \sqrt{2}.$$

Funksjonene f og g er altså elementer i mengden $\mathbb{R}^S$.

a) Forklar hva vi mener med elementet $-f \in \mathbb{R}^S$.

b) Hva mener vi med uttrykket $2f + 3g \in \mathbb{R}^S$?

c) Beskriv det elementet i $\mathbb{R}^S$ som oppfører seg som en nullvektor.

d) Overbevis deg selv om at $\mathbb{R}^S$ blir et vektorrom over $\mathbb{R}$.

La nå X være en hvilken som helst mengde.

e) Overbevis deg selv om at $\mathbb{R}^X$ blir et vektorrom over $\mathbb{R}$.

Mer, mer, mer!

Oppgave 5. Mengden $M_{m,n}(\mathbb{R})$ består av alle $m \times n$-matriser av reelle tall. Denne mengden har addisjon og skalarmultiplikasjon som du kjenner fra MA1201/6201.

Sjekk nitid at $M_{m,n}(\mathbb{R})$ med denne addisjonen og skalarmultiplikajsonen oppfyller alle de åtte aksiomene I–VIII for et $\mathbb{R}$-vektorrom.

Merk: Dette betyr spesielt at gode gamle $\mathbb{R}^m$ virkelig er et $\mathbb{R}$-vektorrom, siden $\mathbb{R}^m$ er $m \times 1$-matrisene.

Oppgave 6. La ∞ og $-\infty$ være to symboler og definér en addisjon og en skalarmultiplikasjon på mengden

$$V = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$$

slik du kanskje ville gjette. Eksplisitt vil dette si at vi lar sum og produkt av to reelle tall være som vanlig, og at vi innfører de følgende regnereglene (hvor $x \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
x + \infty = \infty + x &= \infty, \\
x + (-\infty) = (-\infty) + x &= -\infty, \\
\infty + \infty &= \infty, \\
(-\infty) + (-\infty) &= -\infty, \\
\infty + (-\infty) &= 0, \\
x \cdot \infty &= \begin{cases} -\infty & \text{hvis } x < 0, \\ 0 & \text{hvis } x = 0, \\ \infty & \text{hvis } x > 0, \text{ og} \end{cases} \\
x \cdot (-\infty) &= \begin{cases} \infty & \text{hvis } x < 0, \\ 0 & \text{hvis } x = 0, \\ -\infty & \text{hvis } x > 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Blir V et vektorrom over $\mathbb{R}$?