SAMARBEIDSOPPGAVER S0
MA1202/6202

Mengder og funksjoner

Oppgave 1. Skriv ned alle elementene i hver av de følgende mengdene.

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 3\}$

b) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 3\}$

c) $\{n \in \mathbb{Z} \mid \text{det finnes en } m \in \mathbb{Z} \text{ slik at } nm = 60\}$

Oppgave 2. Se på mengdene

$$A = \{w,\, x,\, y,\, z\} \text{ og } D = \{1,\, 2,\, 3,\, 4\}$$

og de to funksjonene $\alpha, \beta \colon A \longrightarrow D$ gitt ved

$$\begin{array}{llll} \alpha(w) = 2; & \alpha(x) = 4; & \alpha(y) = 1; & \alpha(z) = 2; \\ \beta(w) = 4; & \beta(x) = 2; & \beta(y) = 3; & \beta(z) = 1. \end{array}$$

a) Er α injektiv? Er β injektiv?

b) Er α surjektiv? Er β surjektiv?

Se nå på delmengdene $B = \{w,\, y\} \subset A$ og $C = \{x,\, y,\, z\} \subset A$.

c) Finn de tre delmengdene $\alpha(B)$, $\beta(C)$ og $\alpha(B \cap C)$ av D.

Oppgave 3. La $f \colon A \longrightarrow B$ være en funksjon. *Fullfør utsagnene:*

a) f er ikke surjektiv hvis det finnes ...

b) f er ikke injektiv hvis det finnes ...

c) f er injektiv og surjektiv hvis og bare hvis det for hver $b \in B$ finnes ...

Oppgave 4. Se på mengdene $A = \{x,\, y,\, z\}$ og $B = \{1,\, 2,\, 3\}$.

a) Hvor mange funksjoner fra A til B eksisterer?

b) Hvor mange av funksjonene fra A til B er *injektive*?

c) Hvor mange av funksjonene fra A til B er *surjektive*?

d) Hvor mange funksjoner fra A til mengden $\{1,\, 2\}$ eksisterer?

Oppgave 5. Vis at $\{2^x \mid x \in \mathbb{R}\} = \{4^y \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Oppgave 6. Se på de tre funksjonene $f, g, h\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ gitt ved henholdsvis

$$f(n) = 2n,\ g(n) = n+1 \text{ og } h(n) = n^3 \text{ for hver } n \in \mathbb{Z}.$$

a) Hvilke av funksjonene f, g og h er injektive?

b) Hvilke av funksjonene f, g og h er surjektive?

Husk at hver av de følgende seks komposisjonene også er en funksjon fra $\mathbb{Z}$ til $\mathbb{Z}$:

$$(*) \qquad f\circ f,\ \ g\circ g,\ \ h\circ h,\ \ h\circ f,\ \ f\circ g,\ \ g\circ h.$$

c) Finn regelen (altså "funksjonsuttrykket") til hver av funksjonene i $(*)$.

d) Finn verdimengden til hver av funksjonene i $(*)$.

MA1201 (DA CAPO)

Oppgave 7. Finn en vektor $\bar{v} \in \mathbb{R}^4$ som er slik at

$$(4,\ -3,\ 1,\ 7) + 2\cdot\bar{v} = (6,\ 9,\ -5,\ 11).$$

Oppgave 8. Se på matrisene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ \text{og } C = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Hvilke av matrisene $A\cdot B$, $A\cdot C$, og $B\cdot C$ finnes, og hvordan ser disse ut?

b) Hvilke av matrisene $A+B$, $A+C$ og $B+C$ finnes, og hvordan ser disse ut?

c) Hva mener vi med matrisa $2\cdot A$?

Oppgave 9. Avgjør om matrisa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

er inverterbar. Finn inversmatrisa A^{-1} hvis den eksisterer.

Oppgave 10. Se på følgende ligningssystem.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{array}$$

a) Skriv ligningssystemet på formen $A\bar{x} = \bar{0}$ hvor A er ei matrise.

b) Finn en generell løsning av ligningssystemet. Hva er dimensjonen til nullrommet til matrisa A?

c) Hva er dimensjonen til kolonnerommet til A?

d) Ligger vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

i kolonnerommet til A?

Mer, mer, mer!

Oppgave 11. La $f\colon A \longrightarrow B$ og $g\colon B \longrightarrow C$ være funksjoner.

a) Vis at hvis både f og g er injektive, så er komposisjonen $g \circ f$ injektiv.

b) Vis at hvis $g \circ f$ er injektiv, så er f injektiv.

c) Vis at hvis både f og g er surjektive, så er $g \circ f$ surjektiv.

d) Vis at hvis $g \circ f$ er surjektiv, så er g surjektiv.

Oppgave 12. La A være en *endelig* mengde og la $f\colon A \longrightarrow A$ være en funksjon.

a) Vis at hvis f er injektiv, så er f også surjektiv (og dermed altså bijektiv).

b) Vis at hvis f er surjektiv, så er f også injektiv (og dermed altså bijektiv).

Oppgave 13. Gi et eksempel på en mengde A og

a) en funksjon $f\colon A \longrightarrow A$ som er injektiv, men ikke surjektiv.

b) en funksjon $g\colon A \longrightarrow A$ som er surjektiv, men ikke injektiv.

Hint: Oppgave 12 sier noe om antallet elementer i en slik mengde A.

Oppgave 14. La $f\colon A \longrightarrow B$ være en funksjon.

Vis at f er bijektiv hvis og bare hvis det finnes en funksjon $f^{-1}\colon B \longrightarrow A$ slik at

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(a) = a \text{ for hver } a \in A \text{ og } \left(f \circ f^{-1}\right)(b) = b \text{ for hver } b \in B.$$

Husk: *Potensmengden* $\mathcal{P}(A)$ til en mengde A er *mengden av alle delmengder av* A. Altså, et element i $\mathcal{P}(A)$ er det samme som en delmengde av A, eller med symboler

$$\mathcal{P}(A) = \{M \mid M \subset A\}\,.$$

For eksempel, hvis $A = \{a, b, c, d\}$, så er $\{a, b, d\} \in \mathcal{P}(A)$ og $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.

Oppgave 15. Skriv ned alle elementene i potensmengden til hver av de følgende mengdene.

a) $\emptyset$

b) $\{a\}$

c) $\{a, b\}$

d) $\{a, b, c\}$

La nå A være en endelig mengde med s elementer. Hvor mange elementer mener du at potensmengden $\mathcal{P}(A)$ har? Kan du bevise at du har rett?

Oppgave 16. For hver mengde A ser vi på mengden

$$\{0, 1\}^A = \{f \mid f \text{ er en funksjon } \{0, 1\} \longrightarrow A\}\,,$$

altså mengden av alle funksjoner fra topunktsmengden $\{0, 1\}$ til A.

Vis at det finnes en bijektiv funksjon fra $\{0, 1\}^A$ til potensmengden $\mathcal{P}(A)$.