

PRØVEEKSAMEN II

MA1202 VÅR 2024

Oppgave 1. La

$$A = \begin{pmatrix} a & b - a \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Når er A diagonaliserbar? Finn ei matrise som diagonaliserer A i dette tilfellet.

Oppgave 2. Løs følgende oppgave fra eksamen i mai 2023.

Oppgave 5. La V være et endeligdimensjonalt vektorrom over \mathbb{R} og la f være en diagonaliserbar lineær operator på V med karakteristisk polynom

$$t^2(t-3)(t+2)^2(t-4)^3.$$

- Hva er dimensjonen til V , altså tallet $\dim V$?
- Hva er dimensjonen til kjernen til f , altså tallet $\dim(\text{Ker } f)$?

Oppgave 3. Løs følgende oppgave fra eksamen i august 2023.

Oppgave 4. Det reelle vektorrommet $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ består av alle polynomer av grad høyst 2 med koeffisienter i \mathbb{R} . La D være den lineære operatoren på $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ gitt ved derivasjon, det vil si

$$D(ax^2 + bx + c) = 2ax + b.$$

- Hva er det karakteristiske polynomet til D ?
- Er D diagonaliserbar?

Oppgave 4. Løs følgende oppgave fra eksamen i august 2023.

Oppgave 5. En lineær operator f på et vektorrom kalles *idempotent* hvis $f \circ f = f$.

- Gi et eksempel på et vektorrom med en idempotent lineær operator som ikke er identitetsoperatoren.
- Vis at hvis f er en idempotent lineær operator (på et vilkårlig vektorrom), så er hver egenverdi for f lik 0 eller 1.