MA1202/6202

LØSNINGSFORSLAG TIL UTVALGTE OPPGAVER

SAMARBEIDSOPPGAVER S24

OPPGAVE S24.1

Matrisa

$$U = \begin{pmatrix} \frac{-1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

er unitær og $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

OPPGAVE S24.2

Matrisa

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} & -2/3 \\ 0 & 4/\sqrt{18} & -1/3 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \end{pmatrix}$$

er ortogonal og

$$Q^{-1} B Q = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

OPPGAVE S24.3

Matrisa

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1-i}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

er ortogonal og

$$Q^{-1}CQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

OPPGAVE S24.4

Vi ser på $f: F^2 \longrightarrow F^2$ gitt ved
$f(x, y) = (2x - 3y, 3x + 2y)$.

a) La $F = \mathbb{R}$.

Vi har $f = L_X$ for matrisa $X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
Siden X ikke er symmetrisk er f ikke selvadjungert (FINT FAKTUM II, FORELESNING 23V).

Ved SPEKTRALTEOREM FOR $F = \mathbb{R}$ betyr dette at det ikke finnes noen ortonormal basis β for $\mathbb{R}^2$ som er slik at $[f]_\beta$ er diagonal.

OPPGAVE S24.4

Vi ser på $f: F^2 \longrightarrow F^2$ gitt ved
$f(x, y) = (2x - 3y, 3x + 2y)$.

b) La $F = \mathbb{C}$.

Vi har $f = L_X$ for matrisa $X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
Siden X er normal ($XX^* = X^*X = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$) er også
f normal (FINT FAKTUM II, FORELESNING 23V).

Ved SPEKTRALTEOREM FOR $F = \mathbb{C}$ betyr dette at
det finnes en ortonormal basis for $\mathbb{C}^2$ som
er slik at $[f]_\gamma$ er diagonal.

OPPGAVE S24.4

Vi ser på $f : F^2 \longrightarrow F^2$ gitt ved
$f(x, y) = (2x - 3y , 3x + 2y)$.

b) For eksempel er den ortonormale basisen

$$\gamma = \left\{ \left(\frac{i}{\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{2}} \right) , \left(\frac{-i}{\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \subset \mathbb{C}^2$$

slik at $[f]_\gamma$ er diagonal $\left([f]_\gamma = \begin{pmatrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 2-3i \end{pmatrix} \right)$.

OPPGAVE S24.5

Vi har $\beta = \{(1,0,0), (1,1,1), (1,1,2)\}$. Hvis vi bruker Gram-Schmidt-prosessen på β får vi

$$\beta' = \left\{(1,0,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\},$$

som er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$.

Siden matrisa $[f]_\beta$ er øvre triangulær, er også matrisa $[f]_{\beta'}$ øvre triangulær (dette følger av BEVIS for LEMMA fra FORELESNING 24VA).

OPPGAVE S24.6

La $f : V \to V$ være normal.

Skal vise: f selvadjungert $\Leftrightarrow$ f har kun reelle egenverdier

$\Rightarrow$: Dette viste vi: S23.6 a).

$\Leftarrow$: Siden f er normal gir SPEKTRALTEOREM FOR $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ at det finnes en ortonormal basis β for V (β består av egenvektorer for f) slik at $[f]_\beta$ er diagonal. Matrisa $[f]_\beta$ har egenverdiene til f på diagonalen, så dersom disse er reelle blir

$$[f^*]_\beta = ([f]_\beta)^* = ([f]_\beta)^T = [f]_\beta,$$

og dette betyr at $f^* = f$.

OPPGAVE S24.7

La $f : V \longrightarrow V$ være normal.

Skal vise: Det finnes en lineær operator r på V
som er slik at $r^2 = f$.

Siden f er normal har V en ortonormal basis $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ som består av egenvektorer for f (SPEKTRALTEOREM FOR $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). For $1 \leq i \leq n$, la $\lambda_i \in \mathbb{C}$ være slik at $f(\bar{e}_i) \overset{(*)}{=} \lambda_i \bar{e}_i$ og velg en $\sqrt{\lambda_i}$.

Definér

$$r : V \longrightarrow V \quad \text{ved} \quad r(\bar{e}_i) = \sqrt{\lambda_i}\, \bar{e}_i \quad \forall\ 1 \leq i \leq n$$

(HUSK TEOREM FORELESNING 5V).

OPPGAVE S24.7

For hver $\bar{v} \in V$ er $\bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$, så

$$
\begin{aligned}
r^2(\bar{v}) &= r(r(\bar{v})) \\
&= r(r(\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n)) \\
&= r(\alpha_1 \sqrt{\lambda_1}\, \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \sqrt{\lambda_n}\, \bar{e}_n) \\
&= \alpha_1 \lambda_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n \bar{e}_n \\
&\overset{(*)}{=} \alpha_1 f(\bar{e}_1) + \dots + \alpha_n f(\bar{e}_n) \\
&= f(\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n) = f(\bar{v}),
\end{aligned}
$$

DEFINISJONEN AV r

som viser at $r^2 = f$.

OPPGAVE S24.8

Vi har $f: V \to V$ med $f = f^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$ og $\varepsilon > 0$. Anta at det finnes en $\bar{v} \in V$ med $\|\bar{v}\| \overset{(*)}{=} 1$ og $\|f(\bar{v}) - \lambda\bar{v}\| \overset{(*)}{<} \varepsilon$.

Skal vise: f har en egenverdi λ' slik at $|\lambda - \lambda'| < \varepsilon$

Ved SPEKTRALTEOREM FOR $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ finnes det en ortonormal basis $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ av egenvektorer for f. La $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ være de tilhørende egenverdiene, hhv.

Vi har (ved TEOREM !, FORELESNING 18V) at

$$\bar{v} = \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \ldots + \langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle \bar{e}_n,$$

og dermed

$$f(\bar{v}) \overset{f \text{ lineær}}{=} \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle f(\bar{e}_1) + \ldots + \langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle f(\bar{e}_n)$$

$$\overset{f(\bar{e}_i) = \lambda_i \bar{e}_i}{=} \lambda_1 \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \ldots + \lambda_n \langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle \bar{e}_n .$$

OPPGAVE S24. 8

Dermed blir

$$\varepsilon^2 \overset{(*)}{>} \| f(\bar{v}) - \lambda \bar{v} \|^2$$

$$= \| (\lambda_1 - \lambda)\langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \dots + (\lambda_n - \lambda)\langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle \bar{e}_n \|^2$$

Pythagoras, $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ ortonormal

$$= |\lambda_1 - \lambda|^2 |\langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle|^2 + \dots + |\lambda_n - \lambda|^2 |\langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle|^2$$

$$\geq \left(\min\{|\lambda_1 - \lambda|^2, \dots, |\lambda_n - \lambda|^2\}\right)\left(|\langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle|^2\right)$$

Teorem!, Forelesning V18

$$= \left(\min\{|\lambda_1 - \lambda|^2, \dots, |\lambda_n - \lambda|^2\}\right) \cdot \|\bar{v}\|^2$$

$$\overset{(*)}{=} \min\{|\lambda_1 - \lambda|^2, \dots, |\lambda_n - \lambda|^2\}.$$

Dette betyr at det finnes en $1 \leq i \leq n$ slik at

$$\varepsilon > |\lambda_i - \lambda| ,$$

som var det vi skulle vise (altså med $\lambda' = \lambda_i$).

OPPGAVE S24.9

ii) => i): Dette viste vi i et EKSEMPEL i FORELESNING 22E.

i) => ii): Anta at s er en isometri. Ved TEOREM fra FORELESNING 22E er s normal, så ved SPEKTRALTEOREM FOR $F = \mathbb{C}$ finnes det en ortonormal basis $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ for V som består av egenvektorer for s. For $1 \leq i \leq n$ la $\lambda_i \in \mathbb{C}$ være slik at $s(\bar{e}_i) \overset{(*)}{=} \lambda_i \bar{e}_i$. Da er

$$|\lambda_i| = \|\lambda_i \bar{e}_i\| \overset{(*)}{=} \|s(\bar{e}_i)\| \overset{s \text{ isometri}}{=} \|\bar{e}_i\| = 1,$$

som var det vi manglet.

OPPGAVE S24.10

Skal vise: V har en basis av egenvektorer for f

$\Leftrightarrow$

Det finnes et indreprodukt på V som gjør f til en selvadjungert operator

$\Leftarrow$: Dette følger fra SPEKTRALTEOREM FOR $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

OPPGAVE S24.10

Skal vise: V har en basis av egenvektorer for f

$\Longleftrightarrow$

Det finnes et indreprodukt på V som gjør f til en selvadjungert operator

$\Rightarrow$: Anta at $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ er en basis for V hvor hver $\bar{v}_i$ er en egenvektor for f.
Definér en funksjon $\langle -, - \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ ved

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{v}_i \,,\, \sum_{i=1}^{n} \beta_i \bar{v}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \,.$$

Da er $\langle -, - \rangle$ et indreprodukt på V (sjekk selv)
som er slik at f blir selvadjungert (sjekk selv).

OPPGAVE S24.11

Svaret på spørsmålet er JA:

La $f : V \longrightarrow V$ være selvadjungert. Ved SPEKTRALTEOREM FOR $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ finnes en ortonormal $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ for V som består av egenvektorer for f. For $1 \leq i \leq n$ la $\lambda_i \in \mathbb{R}$ være slik at $f(\bar{e}_i) = \lambda_i \bar{e}_i$. Da kan vi velge $\sqrt[3]{\lambda_i} \in \mathbb{R}$ (enig?) og resten går som i S24.7:

Den lineære operatoren $r : V \longrightarrow V$ gitt ved

$$r(\bar{e}_i) = \sqrt[3]{\lambda_i}\, \bar{e}_i \qquad \forall \quad 1 \leq i \leq n$$

blir en tredjerot av f.