MA1202/6202

LØSNINGSFORSLAG TIL UTVALGTE OPPGAVER

SAMARBEIDSOPPGAVER S23

OPPGAVE S23.1

Vi har

$$A^*A = \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 & 0 \\ 0 & |b|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |c|^2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad AA^* = \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 & 0 \\ 0 & |c|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |b|^2 \end{pmatrix},$$

så A er normal (i.e. $A^*A = AA^*$) hvis og bare hvis $|b| = |c|$.

OPPGAVE S23.2

a) f er selvadjungert $\iff [f]_\beta$ er symmetrisk
$\iff \boxed{b = 3}$.

b) For $b = -3$ er f ikke selvadjungert, men

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

så f er normal for $b = -3$.

OPPGAVE S23.3

a) Et eksempel er $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

b) Hvis A er unitær, så er $A^* = A^{-1}$.
Hvis A er selvadjungert, så er $A^* = A$.
Så hvis A er unitær og selvadjungert, så er

$$\boxed{A^{-1} = A}.$$

OPPGAVE S23.4

La A være øvre triangulær, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Skal vise: A er normal $\iff$ A er diagonal

$\Leftarrow$: Hvis A er diagonal, så er også A^* diagonal. Dermed blir $AA^* = A^*A$ (diagonale matriser er kommuterer), så A er normal.

OPPGAVE S23.4

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$: Anta at A er normal, altså at $A^*A = AA^*$.

Spesielt er

$$|a_{11}|^2 = (A^*A)_{1,1} = (AA^*)_{1,1} = |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \dots + |a_{1n}|^2,$$

som impliserer $a_{12} = \dots = a_{1n} = 0$.

I neste omgang må

$$\underbrace{|a_{12}|^2}_{=0} + |a_{22}|^2 = (A^*A)_{2,2} = (AA^*)_{2,2} = |a_{22}|^2 + |a_{23}|^2 + \dots + |a_{2n}|^2,$$

som impliserer $a_{23} = \dots = a_{2n} = 0$.

Til slutt får vi $a_{ij} = 0 \ \forall \ i \neq j$, i.e.

A er diagonal.

OPPGAVE S23.5

Anta at $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ er slik at

$f(1,2,3) = (0,0,0)$ og $f(2,5,7) = (2,5,7)$

Skal vise: f er ikke selvadjungert

Merk at $\bar{x} = (1,2,3)$ og $\bar{y} = (2,5,7)$ er egenvektorer for f tilhørende distinkte egenverdier (0 og 1, hhv.).
Men $\bar{x}$ og $\bar{y}$ er ikke ortogonale, så ifølge TEOREM :)
fra FORELESNING V23A kan ikke f være normal.
Spesielt betyr det at f ikke er selvadjungert.

OPPGAVE S23.6

a) La $f: V \to V$ være selvadjungert.

Husk: Nå antar vi at $F = \mathbb{R}$ eller $F = \mathbb{C}$.

Skal vise: Hvis λ er en egenverdi for f, så er $\lambda \in \mathbb{R}$.

La $\lambda \in F$ være en egenverdi og la $\bar{v} \in V$ være en tilhørende egenvektor. Da er

$$\lambda \|\bar{v}\|^2 = \langle \lambda \bar{v}, \bar{v} \rangle \overset{f(\bar{v}) = \lambda v}{=} \langle f(\bar{v}), \bar{v} \rangle \overset{f = f^*}{=} \langle \bar{v}, f(\bar{v}) \rangle \overset{f(\bar{v}) = \lambda v}{=} \langle \bar{v}, \lambda \bar{v} \rangle = \overline{\lambda} \|\bar{v}\|^2$$

og dette impliserer $\lambda = \overline{\lambda}$, i.e. $\lambda \in \mathbb{R}$.

OPPGAVE S23.6

b) Matrisa $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ er symmetrisk (altså $A = A^T$), men har ikke reelle egenverdier.

Dette strider ikke mot a) fordi A ikke er selvadjungert ($A^* = -A$).

OPPGAVE S23.7

Skal vise: f selvadjungert $\Leftrightarrow$ $\langle f(\bar{v}),\bar{v}\rangle \in \mathbb{R}$ $\forall$ $\bar{v}\in V$.

La $\bar{v}\in V$. Observer først at

$$\langle f(\bar{v}),\bar{v}\rangle - \overline{\langle f(\bar{v}),\bar{v}\rangle} = \langle f(\bar{v}),\bar{v}\rangle - \langle \bar{v}, f(\bar{v})\rangle$$
$$= \langle f(\bar{v}),\bar{v}\rangle - \langle f^*(\bar{v}),\bar{v}\rangle$$
$$= \langle (f-f^*)(\bar{v}), \bar{v}\rangle.$$

$\Rightarrow$: Anta at $f=f^*$. Da blir $\langle f(\bar{v}),\bar{v}\rangle = \overline{\langle f(\bar{v}),\bar{v}\rangle}$, $\forall$ $\bar{v}\in V$.
i.e. $\langle f(\bar{v}),\bar{v}\rangle \in \mathbb{R}$

$\Leftarrow$: Hvis $\langle f(\bar{v}),\bar{v}\rangle \in \mathbb{R}$ så blir $\langle (f-f^*)(\bar{v}), \bar{v}\rangle = 0$ $\forall$ $\bar{v}\in V$,
så $(f-f^*)(\bar{v}) = \bar{0}$ $\forall$ $\bar{v}\in V$, i.e. $f = f^*$.

OPPGAVE S23.8

a) Vi har

$$\langle f(1), x \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$$

og

$$\langle 1, f(x) \rangle = \langle 1, 1 \rangle = \frac{1}{2},$$

altså

$$\langle f(1), x \rangle \neq \langle 1, f(x) \rangle,$$

som viser at $f \neq f^*$, i.e. f er ikke selvadjungert.

b) FINT FAKTUM fra FORELESNING V22 forutsetter at vi har en ortonormal basis. Basisen $\beta = \{1, x, x^2\}$ her er ikke ortonormal, så vi kan ikke finne $[f^*]_\beta$ ved å konjugerttransponere $[f]_\beta$.

OPPGAVE S23.9

La $f: V \to V$ være normal.

Skal vise: $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^*$

Tilstrekkelig: $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^*$ (Da blir

S22.17

$\operatorname{Im} f^* = (\operatorname{Ker} f)^\perp = (\operatorname{Ker} f^*)^\perp = \operatorname{Im} f$)

Så la $\vec{v} \in V$. Da er

$$\vec{v} \in \operatorname{Ker} f \iff f(\vec{v}) = \vec{0}$$
$$\iff \|f(\vec{v})\| = 0$$

LEMMA II FORELESNING 23VB

$$\iff \|f^*(\vec{v})\| = 0$$
$$\iff f^*(\vec{v}) = \vec{0} \iff \vec{v} \in \operatorname{Ker} f^*,$$

og dette betyr at $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^*$.

OPPGAVE S23.10

La $f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ være normal og anta at

$$f(1,1,1) \overset{(*)}{=} (2,2,2)$$

La $(z_1, z_2, z_3) \in \operatorname{Ker} f$. Ved S23.9 er da også $(z_1, z_2, z_3) \overset{(**)}{\in} \operatorname{Ker} f^*$. Nå får vi

$$\begin{aligned} 2(z_1 + z_2 + z_3) &= \langle (2,2,2), (z_1, z_2, z_3) \rangle \\ &\overset{(*)}{=} \langle f(1,1,1), (z_1, z_2, z_3) \rangle \\ &= \langle (1,1,1), f^*(z_1, z_2, z_3) \rangle \\ &\overset{(**)}{=} \langle (1,1,1), (0,0,0) \rangle = 0, \end{aligned}$$

og dette betyr at $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

OPPGAVE S23.11

Husk: f er nilpotent hvis det finnes en $n \geq 1$ slik at f^n er nulloperatoren (i.e. $f^n(\bar{v}) = \bar{0} \quad \forall \, \bar{v} \in V$).

Skal vise: Hvis $f: V \to V$ ikke er nulloperatoren 0 og f er nilpotent, så er f ikke normal.

Ekvivalent: f nilpotent og normal $\Rightarrow$ $f = 0$.

Så anta at f er nilpotent og normal. Da finnes $n \geq 1$ slik at $f^n = 0$. Vi skal vise ved induksjon på n at $f = 0$.

Tilfellet $n = 1$ er trivielt.

OPPGAVE S23.11

La $n > 1$ og anta at tilfellet $n-1$ holder. Skriv $g = f^{n-1}$ og observer at også g er normal. For hver $\bar{v} \in V$ er

$$\|g^*(g(\bar{v}))\|^2 = \langle g^*(g(\bar{v})), g^*(g(\bar{v})) \rangle$$
$$= \langle g \circ g^*(g(\bar{v})), g(\bar{v}) \rangle$$
$$\xrightarrow{g \text{ normal}} = \langle g^* \circ \underbrace{g \circ g}_{=0}(\bar{v}), g(\bar{v}) \rangle = 0.$$

Dette viser at $g^* \circ g(\bar{v}) \overset{(*)}{=} \bar{0}$, så

$$\|g(\bar{v})\|^2 = \langle g(\bar{v}), g(\bar{v}) \rangle = \langle g^* \circ g(\bar{v}), \bar{v} \rangle \overset{(*)}{=} \langle \bar{0}, \bar{v} \rangle = 0,$$

så $g(\bar{v}) = 0$, i.e. $\overset{f^{n-1}}{\overset{\parallel}{g}} = 0$. Ved induksjonshypotesen impliserer $f^{n-1} = 0$ at $f = 0$, så vi er ferdige.

OPPGAVE S23.12

Skal vise: $\operatorname{Ker}(f^n) = \operatorname{Ker} f$.

$\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(f^n)$: La $\bar{v} \in \operatorname{Ker} f$. Da er

$$f^n(\bar{v}) = f^{n-1}(f(\bar{v})) \overset{f(\bar{v}) = \bar{0}}{=} f^{n-1}(\bar{0}) \overset{f^{n-1} \text{ lineær}}{=} \bar{0},$$

i.e. $\bar{v} \in \operatorname{Ker}(f^n)$.

OPPGAVE S23.12

Skal vise: $\operatorname{Ker}(f^n) = \operatorname{Ker} f$.

$\operatorname{Ker}(f^n) \subset \operatorname{Ker} f$: La $\bar{v} \in \operatorname{Ker}(f^n)$. Ved induksjon er det tilstrekkelig å vise at $\bar{v} \in \operatorname{Ker}(f^{n-1})$.

Vi har for hver $\bar{v} \in V$ at

$$\langle f^* \circ f^{n-1}(\bar{v}), f^* \circ f^{n-1}(\bar{v}) \rangle$$

$$= \langle f \circ f^* \circ f^{n-1}(\bar{v}), f^{n-1}(\bar{v}) \rangle$$

f normal

$$= \langle f^* \circ \underbrace{f^n(\bar{v})}_{=\bar{0}}, f^{n-1}(\bar{v}) \rangle = 0,$$

som betyr at $f^* \circ f^{n-1}(\bar{v}) \overset{(*)}{=} \bar{0}$. Dermed blir

$$0 \overset{(*)}{=} \langle f^* \circ f^{n-1}(\bar{v}), f^{n-2}(\bar{v}) \rangle$$

$$= \langle f^{n-1}(\bar{v}), f^{n-1}(\bar{v}) \rangle,$$

som betyr $f^{n-1}(\bar{v}) = \bar{0}$, i.e. $\bar{v} \in \operatorname{Ker}(f^{n-1})$.

OPPGAVE S23.13

a) Dette er rettfram.

b) Observér at $\forall\ \bar{w}_1, \bar{w}_2 \in V$ er

$$
\begin{aligned}
\langle \bar{w}_1, f^*(\bar{w}_2) \rangle &= \langle f(\bar{w}_1), \bar{w}_2 \rangle \\
&= \langle \langle \bar{w}_1, \bar{u} \rangle \bar{x}, \bar{w}_2 \rangle \\
&= \langle \bar{w}_1, \bar{u} \rangle \langle \bar{x}, \bar{w}_2 \rangle \\
&= \langle \bar{w}_1, \overline{\langle \bar{x}, \bar{w}_2 \rangle}\, \bar{u} \rangle \\
&= \langle \bar{w}_1, \overline{\overline{\langle \bar{w}_2, \bar{x} \rangle}}\, \bar{u} \rangle \\
&= \langle \bar{w}_1, \langle \bar{w}_2, \bar{x} \rangle \bar{u} \rangle,
\end{aligned}
$$

og dette viser at $f^*(\bar{v}) = \langle \bar{v}, \bar{x} \rangle \bar{u} \quad \forall\ \bar{v} \in V.$

OPPGAVE S23.13

c) La $F = \mathbb{R}$.

Skal vise: f selvadjungert $\Leftrightarrow$ $\{\bar{u}, \bar{x}\}$ lineært avhengig

$\Rightarrow$: Anta at f er selvadjungert. Da er $f = f^*$, så

$$\bar{0} = f^*(\bar{v}) - f(\bar{v}) = \langle \bar{v}, \bar{x} \rangle \bar{u} - \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle \bar{x} \quad \forall \ \bar{v} \in V.$$

Spesielt kan vi la $\bar{v} = \bar{u}$ i forrige ligning, som gir

$$\langle \bar{u}, \bar{x} \rangle \bar{u} - \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \bar{x} \overset{(*)}{=} \bar{0}.$$

Merk nå at vi kan anta at $\bar{u} \neq \bar{0}$ og $\bar{x} \neq \bar{0}$ (enhver mengde som inneholder $\bar{0}$ er lineært avhengig). Da må spesielt $\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \neq 0$ og dermed viser $(*)$ at $\{\bar{u}, \bar{x}\}$ er lineært avhengig.

OPPGAVE S23.13

c) La $F = \mathbb{R}$.

Skal vise: f selvadjungert $\Leftrightarrow$ $\{\bar{u}, \bar{x}\}$ lineært avhengig

$\Leftarrow$: Anta at $\{\bar{u}, \bar{x}\}$ er lineært avhengig. Igjen kan vi anta $\bar{u} \neq \bar{0} \neq \bar{x}$ ($\bar{u} = \bar{0} = \bar{x} \Rightarrow f$ er nulloperatoren, og nulloperatoren ER selvadjungert). Dette betyr at $\bar{u} \overset{(*)}{=} \alpha \bar{x}$ for en $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ og det følger at

og $\bar{x} = \frac{1}{\alpha} \bar{u}$

$$
\begin{aligned}
f(\bar{v}) = \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle \bar{x} &\overset{(*)}{=} \langle \bar{v}, \alpha \bar{x} \rangle \frac{1}{\alpha} \bar{u} \\
&= \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \langle \bar{v}, \bar{x} \rangle \bar{u} \\
&= \langle \bar{v}, \bar{x} \rangle \bar{u} = f^*(\bar{v}) \quad \forall \ \bar{v} \in V,
\end{aligned}
$$

i.e. f er selvadjungert.

OPPGAVE S23.13

d) Skal vise: f normal $\iff$ $\{\bar{u}, \bar{x}\}$ lineært avhengig

$\Rightarrow$: Anta at f er normal. For hver $\bar{v} \in V$ blir

$$
\begin{aligned}
\langle \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle \bar{x}, \bar{x} \rangle \bar{u} &= f^*(\langle \bar{v}, \bar{u} \rangle \bar{x}) \\
&= f^*(f(\bar{v})) \\
\text{f normal} \quad &= f(f^*(\bar{v})) \\
&= f(\langle \bar{v}, \bar{x} \rangle \bar{u}) \\
&= \langle \langle \bar{v}, \bar{x} \rangle \bar{u}, \bar{u} \rangle \bar{x}
\end{aligned}
$$

Som i "c) $\Rightarrow$" kan vi anta $\bar{u} \neq \bar{0} \neq \bar{x}$. Siden dette holder spesielt for $\bar{v} = u$, følger det at $\bar{x}$ er et ikke-null skalarmultiplum av $\bar{u}$, i.e. $\{\bar{u}, \bar{x}\}$ er lineært avhengig.

OPPGAVE S23.13

d) Skal vise: f normal $\Leftrightarrow$ $\{\bar{u}, \bar{x}\}$ lineært avhengig

$\Leftarrow$: Anta at $\{\bar{u}, \bar{x}\}$ er lineært avhengig. Som i "c) $\Leftarrow$" kan vi anta $\bar{u} \neq \bar{o} \neq \bar{x}$. Det betyr at det finnes $0 \neq \alpha \in F$ slik at $\bar{u} \overset{(*)}{=} \alpha \bar{x}$, så for hver $\bar{v} \in V$ blir

og $\bar{x} = \frac{1}{\alpha} \bar{u}$

$$
\begin{aligned}
f^* f(\bar{v}) &= f^*(\langle \bar{v}, \bar{u} \rangle \bar{x}) = \langle \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle \bar{x}, \bar{x} \rangle \bar{u} \\
&\overset{(*)}{=} \langle \langle \bar{v}, \alpha \bar{x} \rangle \tfrac{1}{\alpha} \bar{u}, \tfrac{1}{\alpha} \bar{u} \rangle \alpha \bar{x} \\
&= \bar{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \overline{\frac{1}{\alpha}} \cdot \alpha \langle \langle \bar{v}, \bar{x} \rangle \bar{u}, \bar{u} \rangle \bar{x} \\
&= \langle \langle \bar{v}, \bar{x} \rangle \bar{u}, \bar{u} \rangle \bar{x} \\
&= f(\langle \bar{v}, \bar{x} \rangle \bar{u}) = f(f^*(\bar{v})),
\end{aligned}
$$

som viser at f er normal.

OPPGAVE S23.14

Svaret på spørsmålet er JA :

Skriv $\bar{a} = (1,0,0)$, $\bar{b} = (0,1,0)$, $\bar{c} = (0,1,1)$. Da er $\beta = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ en basis for $\mathbb{R}^3$. Dessuten er $\bar{a}, \bar{b}$ og $\bar{c}$ egenvektorer for operatoren $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bestemt av

$$\bar{a} \overset{f}{\longmapsto} \bar{0} \ ; \quad \bar{b} \overset{f}{\longmapsto} \bar{0} \ ; \quad \bar{c} \overset{f}{\longmapsto} \bar{c} \ .$$

Til slutt kan vi observere at f ved TEOREM :) ikke er selvadjungert , siden $\bar{b}$ og $\bar{c}$ er egenvektorer tilhørende distinkte egenverdier (0 og 1, hhv.) , men $\bar{b}$ og $\bar{c}$ er ikke ortogonale

OPPGAVE S23.15

Dette er rettfram:

$$\boxed{(f^* \circ f - f \circ f^*)^*} = (f^* \circ f)^* - (f \circ f^*)^*$$
$$= f^* \circ (f^*)^* - (f^*)^* \circ f^*$$
$$= \boxed{f^* \circ f - f \circ f^*}.$$

FUNDAMENTALE EGENSKAPER

OPPGAVE 523.16

La $\lambda \in F$. Da er

$$(f - \lambda \cdot id_V)^*(f - \lambda \cdot id_V) = (f^* - \bar{\lambda} \cdot id_V)(f - \lambda \cdot id_V)$$
$$= f^* \circ f - \lambda f^* - \bar{\lambda} f + |\lambda|^2 id_V$$

og

$$(f - \lambda \cdot id_V)(f - \lambda \cdot id_V)^* = (f - \lambda \cdot id_V)(f^* - \bar{\lambda} \cdot id_V)$$
$$= f \circ f^* - \bar{\lambda} f - \lambda f^* + |\lambda|^2 id_V.$$

Dette betyr at hvis f er normal (i.e. $f \circ f^* = f^* \circ f$), så er $f - \lambda \cdot id_V$ normal (i.e. $(f - \lambda \cdot id_V)^*(f - \lambda \cdot id_V) = (f - \lambda \cdot id_V)(f - \lambda \cdot id_V)^*$).