MA1202/6202

LØSNINGSFORSLAG TIL UTVALGTE OPPGAVER

SAMARBEIDSOPPGAVER S22

OPPGAVE S22.1

a) Matrisa er ikke ortogonal.

b) Matrisa er ortogonal, så inversen er lik den transponerte, altså

$$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

OPPGAVE S22.2

a) Matrisa er unitær, så inversen er lik den konjugerttransponerte, altså

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & \frac{-1+i}{2} \\ 1/\sqrt{2} & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$$

b) Matrisa er unitær, så inversen er lik den konjugerttransponerte, altså

$$\begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} & -\frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{3-i}{2\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4-3i}{2\sqrt{15}} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{\sqrt{3}} & -\frac{5i}{2\sqrt{15}} \end{pmatrix}.$$

OPPGAVE S22.3

a) A ortogonal $\Rightarrow$ $A^{-1} = A^T$

$\Rightarrow$ $(A^{-1})^{-1} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,

i.e. A^{-1} ortogonal.

b) A og B ortogonale $\Rightarrow$ $(AB)^T = B^T A^T = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$,

i.e. AB ortogonal.

c) A ortogonal $\Rightarrow$ $1 = \det(AA^T) = \det(A)\det(A^T)$

$= \det(A)\det(A)$

$\Rightarrow \det(A) = \pm 1.$

d) Dette er rettfram.

OPPGAVE S22.4

La U være unitær med en egenverdi $\lambda \in \mathbb{C}$

Skal vise: $|\lambda| = 1$.

La $\bar{v}$ være en egenvektor tilhørende λ. Da er

$$\|\bar{v}\|^2 \overset{\text{DEF}}{=} \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \overset{U \text{ unitær}}{=} \langle U\bar{v}, U\bar{v} \rangle$$

$$\overset{\bar{v} \text{ egenvektor}}{=} \langle \lambda\bar{v}, \lambda\bar{v} \rangle$$

$$\overset{\text{AKSIOMER}}{=} |\lambda|^2 \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \overset{\text{DEF}}{=} |\lambda|^2 \|\bar{v}\|^2$$

$$\Rightarrow |\lambda| = 1.$$

OPPGAVE S22.5

Skal vise: λ egenverdi for $f \Leftrightarrow \bar{\lambda}$ egenverdi for f^*

Ekvivalent: λ IKKE egenverdi for $f \Leftrightarrow \bar{\lambda}$ IKKE egenverdi for f^*

Vi har

λ IKKE egenverdi for $f \Leftrightarrow f - \lambda \cdot id_V$ inverterbar

$\Leftrightarrow g \circ (f - \lambda \cdot id_V) = id_V = (f - \lambda \cdot id_V) \circ g$ for en lineær operator g på V

$\Leftrightarrow g^* \circ (f - \lambda \cdot id_V)^* = id_V = (f - \lambda \cdot id_V)^* \circ g^*$ for en lineær operator g på V

$\Leftrightarrow (f - \lambda \cdot id_V)^*$ inverterbar

$\Leftrightarrow f^* - \bar{\lambda} \cdot id_V$ inverterbar

$\Leftrightarrow \bar{\lambda}$ IKKE egenverdi for f^*

OBSERVASJON

FORELESNING 14V

FUNDAMENTALE EGENSKAPER

OPPGAVE S22.6

a) Vi nøyer oss med å oppgi fasit:

$$f^*(y_1, y_2) = (2y_2, y_1, 3y_1).$$

b) Dette er rutinemessig.

OPPGAVE S22.7

Vi har $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gitt ved

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

Hvis β er standardbasisen for $\mathbb{R}^n$, så blir

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ved FINT FAKTUM fra FORELESNING 22VB blir

$$[f^*]_\beta = ([f]_\beta)^* = ([f]_\beta)^T,$$

OPPGAVE S22.7

altså

$$[f^*]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Det betyr at $f^* : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ er den lineære operatoren gitt ved

$$\underline{\underline{f^*(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = (y_2, y_3, \dots, y_n, 0)}}.$$

OPPGAVE S22.8

Har $f: U \overset{f^*}{\underset{\longrightarrow}{\longleftarrow}} V$ og $g: V \overset{g^*}{\underset{\longrightarrow}{\longleftarrow}} W$.

Skal vise: $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

Altså: $\langle (g \circ f)(\bar{u}), \bar{w} \rangle = \langle \bar{u}, (f^* \circ g^*)(\bar{w}) \rangle \quad \forall \bar{u} \in U, \bar{w} \in W.$

Så la $\bar{u} \in U$ og $\bar{w} \in W$. Da blir

$$\langle \bar{u}, (f^* \circ g^*)(\bar{w}) \rangle = \langle \bar{u}, f^*(g^*(\bar{w})) \rangle$$

DEF AV f^* $\;= \langle f(\bar{u}), g^*(\bar{w}) \rangle$

DEF AV g^* $\;= \langle g(f(\bar{u})), \bar{w} \rangle = \langle (g \circ f)(\bar{u}), \bar{w} \rangle.$

OPPGAVE S22.9

Skal vise: s og t isometrier $\Rightarrow$ $t \circ s$ isometri.

Anta at s og t er isometrier. For hver $\vec{v} \in V$ blir

$$\|(t \circ s)(\vec{v})\| = \|t(s(\vec{v}))\| \underset{t \text{ isometri}}{=} \|s(\vec{v})\| \overset{s \text{ isometri}}{=} \|\vec{v}\|,$$

som viser at $t \circ s$ er en isometri.

OPPGAVE S22.10

Påstanden er ikke sann:

Se for eksempel på $\mathbb{R}^2$ med euklidsk indreprodukt og den lineære operatoren $s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$s(x,y) = (x+y, 0).$$

La $\bar{e}_1 = (1,0)$ og $\bar{e}_2 = (0,1)$. Da er $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ en ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$ og vi har

$$\|s(\bar{e}_1)\| = 1 \quad \text{og} \quad \|s(\bar{e}_2)\| = 1,$$

men s er ikke en isometri

$(\|(1,-1)\| = \sqrt{2}$, men $\|s(1,-1)\| = \|(0,0)\| = 0)$.

OPPGAVE S22.11

Skal vise: $f \circ g = id_V \iff g \circ f = id_V$

$\Rightarrow$: Anta at $f \circ g \overset{(*)}{=} id_V$. Siden id_V er invertertbar, gir S7.3 at både f og g er invertertbare.
Så vi har

$$
\begin{aligned}
& f \circ g \overset{(*)}{=} id_V \\
\Rightarrow \quad & (f \circ g) \circ g^{-1} = id_V \circ g^{-1} \\
\Rightarrow \quad & f = g^{-1} \\
\Rightarrow \quad & g \circ f = g \circ g^{-1} = id_V.
\end{aligned}
$$

$\Leftarrow$: La f og g bytte roller i den implikasjonen vi allerede har vist.

OPPGAVE S22.12

Skal vise: $[f^*]_{\beta'}^{\beta} = \left([f]_{\beta}^{\beta'}\right)^*$

La $\beta = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ og $\beta' = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\}$.

Husk: Kolonne k i $[f]_{\beta}^{\beta'}$ er koordinatvektoren $[f(\bar{e}_k)]_{\beta'}$.

Siden β' er ortonormal gir TEOREM(!) fra FORELESNING V18 at

$$f(\bar{e}_k) = \langle f(\bar{e}_k), \bar{u}_1 \rangle \bar{u}_1 + \dots + \langle f(\bar{e}_k), \bar{u}_m \rangle \bar{u}_m.$$

Så i kolonne k, rad j i $[f]_{\beta}^{\beta'}$ har vi $\langle f(\bar{e}_k), \bar{u}_j \rangle$.

OPPGAVE S22.12

Samme argument (erstatt f med f^* og la β og β' bytte roller) gir:

I kolonne k, rad j i $[f^*]^{\beta}_{\beta'}$ har vi

$$\langle f^*(\bar{u}_k), \bar{e}_j \rangle = \langle \bar{u}_k, f(\bar{e}_j) \rangle$$
$$= \overline{\langle f(\bar{e}_j), \bar{u}_k \rangle}.$$

Konjugering i $\mathbb{C}$

Dette viser at $[f^*]^{\beta}_{\beta'} = \left([f]^{\beta'}_{\beta}\right)^*$

OPPGAVE S22.13

La $\dim V = n$.

i) => iii): Anta at f er ortogonal og la $\beta \subset V$ være en ortonormal basis. Da er

$$[f]_\beta \cdot ([f]_\beta)^* \overset{S22.11}{=} [f]_\beta \cdot [f^*]_\beta \underset{\substack{\text{TEOREM II} \\ \text{FORELESNING E8}}}{=} [f \circ f^*]_\beta = [id_V]_\beta = I_{n \times n},$$

i.e. $[f]_\beta$ er ortogonal.

iii) => ii): Opplagt (husk at det eksisterer en ortonormal basis for V ved KOROLLAR fra FORELESNING V18).

OPPGAVE S22.13

ii) => i): Anta at $\beta \subset V$ er en ortonormal basis slik at $[f]_\beta$ er ortogonal.

Da får vi

$$\boxed{[f \circ f^*]_\beta} \overset{\text{Teorem II, Forelesning E8}}{=} [f]_\beta \cdot [f^*]_\beta \overset{S22.11}{=} [f]_\beta \cdot ([f]_\beta)^* = I_{n \times n},$$

som impliserer $f \circ f^* = id_V$, i.e. f er ortogonal

OPPGAVE S22.14

La $\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in W$. For hver $\bar{v} \in V$ er

$$\begin{aligned}\langle \bar{v}, f^*(\bar{w}_1 + \bar{w}_2) \rangle &= \langle f(\bar{v}), \bar{w}_1 + \bar{w}_2 \rangle \\ &= \langle f(\bar{v}), \bar{w}_1 \rangle + \langle f(\bar{v}), \bar{w}_2 \rangle \\ &= \langle \bar{v}, f^*(\bar{w}_1) \rangle + \langle \bar{v}, f^*(\bar{w}_2) \rangle \\ &= \langle \bar{v}, f^*(\bar{w}_1) + f^*(\bar{w}_2) \rangle,\end{aligned}$$

som betyr at

$$f^*(\bar{w}_1 + \bar{w}_2) = f^*(\bar{w}_1) + f^*(\bar{w}_2).$$

Leseren kan selv sjekke at

$$f^*(\lambda \bar{w}) = \lambda f^*(\bar{w}) \quad \forall \lambda \in F, \bar{w} \in W.$$

OPPGAVE S22.15

La $\bar{u}, \bar{v} \in V$. Da er

$$\langle \bar{v}, (id_V)^*(\bar{u}) \rangle = \langle id_V(\bar{u}), \bar{v} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle,$$

som betyr $(id_V)^* = id_V$.

OPPGAVE S22.16

a) For hver $\bar{v} \in V$ og $\bar{w} \in W$ er

$$\langle \bar{v}, (f+g)^*(\bar{w}) \rangle = \langle (f+g)(\bar{v}), \bar{w} \rangle$$
$$= \langle f(\bar{v}), \bar{w} \rangle + \langle g(\bar{v}), \bar{w} \rangle$$
$$= \langle \bar{v}, f^*(\bar{w}) \rangle + \langle \bar{v}, g^*(\bar{w}) \rangle$$
$$= \langle \bar{v}, f^*(\bar{w}) + g^*(\bar{w}) \rangle,$$

som betyr $(f+g)^*(\bar{w}) = f^*(\bar{w}) + g^*(\bar{w})$,

i.e.

$$(f+g)^* = f^* + g^*$$

OPPGAVE S22.16

b) For hver $\lambda \in F$, $\bar{v} \in V$ og $\bar{w} \in W$ har vi

$$\boxed{\langle \bar{v}, (\lambda f)^*(\bar{w}) \rangle} = \langle (\lambda f)(\bar{v}), \bar{w} \rangle$$
$$= \langle \lambda f(\bar{v}), \bar{w} \rangle$$
$$= \lambda \langle f(\bar{v}), \bar{w} \rangle$$
$$= \lambda \langle \bar{v}, f^*(\bar{w}) \rangle$$
$$= \langle \bar{v}, \bar{\lambda} f^*(\bar{w}) \rangle$$
$$\boxed{= \langle \bar{v}, (\bar{\lambda} f^*)(\bar{w}) \rangle},$$

som betyr $(\lambda f)^*(\bar{w}) = (\bar{\lambda} f^*)(\bar{w})$,

i.e.

$$\boxed{(\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*.}$$

OPPGAVE S22.16

c) For hver $\bar{v} \in V$ og $\bar{w} \in W$ har vi:

$$\begin{aligned}
\langle \bar{w}, (f^*)^*(\bar{v}) \rangle &= \langle f^*(\bar{w}), \bar{v} \rangle \\
&= \overline{\langle \bar{v}, f^*(\bar{w}) \rangle} \\
&= \overline{\langle f(\bar{w}), \bar{v} \rangle} \\
&= \overline{\overline{\langle \bar{v}, f(\bar{w}) \rangle}} \\
&= \langle \bar{v}, f(\bar{w}) \rangle,
\end{aligned}$$

som betyr at $(f^*)^*(\bar{w}) = f(\bar{w})$,

i.e.

$$(f^*)^* = f.$$

OPPGAVE S22.17

a) For hver $\bar{w} \in W$ har vi

$$\bar{w} \in \mathrm{Ker}\, f^* \iff f^*(\bar{w}) = \bar{0}$$
$$\iff \langle \bar{v}, f^*(\bar{w}) \rangle = 0 \quad \forall\, \bar{v} \in V$$
$$\iff \langle f(\bar{v}), \bar{w} \rangle = 0 \quad \forall\, \bar{v} \in V$$
$$\iff \bar{w} \in (\mathrm{Im}\, f)^{\perp},$$

så $\mathrm{Ker}\, f^* = (\mathrm{Im}\, f)^{\perp}$.

d) Ta $(-)^{\perp}$ på begge sider av likheten i a).

c) Erstatt f med f^* i a).

b) Erstatt f med f^* i d).