LØSNINGSFORSLAG TIL UTVALGTE OPPGAVER

SAMARBEIDSOPPGAVER S21

OPPGAVE S21.1

Her er vi ute etter Fourier-koeffisientene til $f(x) = x+1$ på intervallet $[0, 2\pi]$. Disse er

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(1+x)\,dx = 2(1+\pi)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(1+x)\cos kx\,dx = 0 \qquad (k \geq 1)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(1+x)\sin kx\,dx = \frac{-2}{k} \qquad (k \geq 1)$$

OPPGAVE S21.1

a) Den beste tilnærminga til f på denne formen

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x$$

$$\underline{\underline{= 1 + \pi - 2 \sin x - \sin 2x}}$$

b) Den beste tilnærminga til f her er

$$h(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + \ldots + a_n \cos nx + b_1 \sin x + \ldots + b_n \sin nx$$

$$\underline{\underline{= 1 + \pi - 2 \left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} \right)}}$$

OPPGAVE S21.2

a) La V være indreproduktrommet av alle kontinuerlige funksjoner $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ med

$$\langle h, g \rangle = \int_0^1 h(x)g(x)\,dx \qquad \forall \quad h,g \in V.$$

La $f \in V$ være gitt ved $f(x) = x \quad \forall \quad x \in [0,1]$

Skal finne: Den funksjonen $\phi \in V$ på formen

$$\phi(x) = a + b e^x \qquad \text{med } a, b \in \mathbb{R}$$

som minimerer

$$\int_0^1 |f(x) - \phi(x)|^2\, dx.$$

OPPGAVE S21.2

a) La $U = \text{span}(1, e^x) \subset V$. Den funksjonen ϕ som vi søker, er den ortogonale projeksjonen $P_U(f(x))$! For å regne ut $P_U(f(x))$ trenger vi en ortonormal basis for U, og det får vi ved å gjøre Gram-Schmidt på basisen $\{1, e^x\}$ for U. Resultatet er

$$\bar{e}_1 = 1 \quad ; \quad \bar{e}_2 = \frac{e^x - e + 1}{\sqrt{\frac{1}{2}(e-1)(3-e)}} .$$

OPPGAVE S21.2

a) Da blir

$$\phi(x) = P_U(f(x))$$

$$= \langle f, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \langle f, \bar{e}_2 \rangle \bar{e}_2$$

$$= \int_0^1 x \cdot 1 \, dx \cdot 1 + \int_0^1 \frac{x(e^x - e + 1)}{\sqrt{\frac{1}{2}(e-1)(3-e)}} dx \; \bar{e}_2$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \frac{2}{(e-1)(3-e)} \left[xe^x - e^x - \frac{x^2 e^x}{2} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 (e^x - e + 1)$$

$$= \frac{e^x}{e-1} - \frac{1}{2}$$

(altså $a = -\frac{1}{2}$ og $b = \frac{1}{e-1}$)

OPPGAVE S21.2

b) Avviket i a) er

$$\int_0^1 |f(x) - \phi(x)|^2 \, dx = \int_0^1 \left(x - \left(\frac{e^x}{e-1} - \frac{1}{2}\right)\right)^2 dx$$

$$= \underline{\underline{\frac{7e - 19}{12e - 12}}} \approx 0{,}00136$$

OPPGAVE 521.3

a) La V være indreproduktrommet av alle kontinuerlige funksjoner $[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ med

$$\langle h, g \rangle = \int_{-1}^{1} h(x) g(x)\, dx \qquad \forall \quad h, g \in V.$$

La $f \in V$ være gitt ved $f(x) = \sin \pi x \quad \forall \quad x \in [-1,1]$

Skal finne: Den funksjonen $\in V$ på formen $p(x) = a + bx + cx^2$ med $a, b, c \in \mathbb{R}$ som minimerer

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - p(x)|^2 \, dx .$$

OPPGAVE S21.3

a) La $U = \text{span}(1, x, x^2) \subset V$. Den funksjonen p som vi søker, er den ortogonale projeksjonen $P_U(f(x))$! For å regne ut $P_U(f(x))$ trenger vi en ortonormal basis for U, og det får vi ved å gjøre Gram–Schmidt på basisen $\{1, x, x^2\}$ for U. Resultatet er

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \; ; \quad \bar{e}_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\,x \; ; \quad \bar{e}_3 = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

(Ser denne ortonormale basisen kjent ut?)

OPPGAVE S21.3

a) Da blir

$$p(x) = P_U(f(x))$$

$$= \langle f, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \langle f, \bar{e}_2 \rangle \bar{e}_2 + \langle f, \bar{e}_3 \rangle \bar{e}_3$$

$$= \dots = \underline{\underline{\frac{3}{\pi} x}}$$

(altså $a = 0$, $b = \frac{3}{\pi}$ og $c = 0$).

Regne litt

OPPGAVE S21.3

b) Avviket i a) er

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - p(x)|^2 \, dx = \int_{-1}^{1} \left(\sin \pi x - \frac{3}{\pi} x\right)^2 dx$$

$$= 1 - \frac{6}{\pi^2} .$$