MA1202/6202

LØSNINGSFORSLAG TIL UTVALGTE OPPGAVER

SAMARBEIDSOPPGAVER S20

OPPGAVE S20.1

a) Mengden $\{\underbrace{(0,1,0)}_{=\bar{e}_1}, \underbrace{(\frac{-4}{5}, 0, \frac{3}{5})}_{=\bar{e}_2}\}$ er ortonormal (i $\mathbb{R}^3$ med det euklidske indreproduktet), så vi kan bruke formelen for $P_U(\bar{v})$ fra FORELESNING E20 (evt V20).

Altså blir

$$P_U(\bar{v}) = \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \langle \bar{v}, \bar{e}_2 \rangle \bar{e}_2$$

$$= \langle (1,1,1), (0,1,0) \rangle (0,1,0) + \langle (1,1,1), (\tfrac{-4}{5}, 0, \tfrac{3}{5}) \rangle (\tfrac{-4}{5}, 0, \tfrac{3}{5})$$

$$= \underline{\underline{\left(\tfrac{4}{25},\ 1,\ \tfrac{-3}{25}\right)}}$$

OPPGAVE S20.2

a) Her er $\bar{v}_3 = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$, men $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ er lineært uavhengig og dermed en basis for $V = \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. Altså er $\underline{\underline{\dim V = 2}}$.

Vi finner en ortonormal basis for V ved å gjøre Gram-Schmidt-prosessen på $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$:

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{e}_2 = \frac{\bar{v}_2 - \langle \bar{v}_2, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1}{\|\bar{v}_2 - \langle \bar{v}_2, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Altså, $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ er en ortonormal basis for V.

OPPGAVE S20.2

b) Den vektoren $\bar{v}$ som vi er ute etter, er den ortogonale projeksjonen $P_V(\bar{w})$ av $\bar{w}$ på V (husk TEOREM fra FORELESNING E20).
Siden $\{\bar{e}_1, e_2\}$ fra a) er en ortonormal basis for V, kan vi bruke formelen fra FORELESNING E20:

$$\bar{v} = P_V(\bar{w}) = \langle \bar{w}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \langle \bar{w}, \bar{e}_2 \rangle \bar{e}_2$$

$$= \sqrt{3}\,\bar{e}_1 + \frac{3}{\sqrt{15}}\bar{e}_2 = \underline{\underline{\frac{3}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

OPPGAVE S20.3

Den vektoren $\bar{u}$ som vi er ute etter, er den ortogonale projeksjonen $P_U(1,2,3,4)$ av vektoren $(1,2,3,4)$ på underrommet U (dette er TEOREM fra FORELESNING E20).

Før vi kan bruke formelen for P_U fra FORELESNING E20, trenger vi en ortonormal basis for U. Det får vi ved å gjøre Gram–Schmidt-prosessen på $\{(1,1,0,0), (1,1,1,2)\}$ med resultatet

$$\bar{e}_1 = \left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0\right) \;;\; \bar{e}_2 = \left(0, 0, 1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}\right).$$

OPPGAVE S20.3

Nå kan vi regne ut at

$$\bar{u} = P_U(1,2,3,4)$$

Formel fra
FORELESNING E20

$$= \langle (1,2,3,4), \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \langle (1,2,3,4), \bar{e}_2 \rangle \bar{e}_2$$

$$= \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{11}{5}, \frac{22}{5} \right)$$

OPPGAVE S20.4

La $U = \{ q(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \mid q(0) = 0 = q'(0) \}$. Da er U et underrom av $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ og det polynomet $p(x)$ som vi er ute etter, er

den ortogonale projeksjonen $P_U(2+3x)$

av polynomet $2+3x$ på underrommet U (dette er det TEOREM fra FORELESNING E20 som sier).

Før vi kan bruke formelen for P_U fra FORELESNING E20, trenger vi en ortonormal basis for U. En basis for U er $\{x^2, x^3\}$, og Gram-Schmidt-prosessen gir den følgende ortonormale basisen:

$$\bar{e}_1 = \sqrt{5}\, x^2 \quad , \quad \bar{e}_2 = \sqrt{7}\,(-5x^2 + 6x^3).$$

OPPGAVE S20.4

Da vet vi altså at

$$p(x) = P_U(2+3x)$$

$$= \langle 2+3x, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \langle 2+3x, \bar{e}_2 \rangle \bar{e}_2$$

$$= \dots = \underline{\underline{24x^2 - \frac{203}{10}x^3}}$$

Lett regning

OPPGAVE S20.5

Skal vise: $\boxed{P_{U^\perp} = id_V - P_U}$

La $\bar{v} \in V$. Da kan vi skrive

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$$

med $\bar{u} \in U$ og $\bar{w} \in U^\perp$ (TEOREM (ORTOGONAL PROJEKSJON) fra FORELESNING V20). Det følger at

$$\boxed{P_{U^\perp}(\bar{v})} = \bar{w} = (\bar{u} + \bar{w}) - \bar{u}$$
$$= \bar{v} - \bar{u}$$
$$\boxed{= id_V(\bar{v}) - P_U(\bar{v})}.$$

$\square$

OPPGAVE S20.6

Skal vise: U er invariant under f

$$\Longleftrightarrow$$

$$P_U \circ f \circ P_U = f \circ P_U$$

$\Rightarrow$: Anta at U er f-invariant og la $\bar{v} \in V$. Siden $P_U(\bar{v}) \in U$, er også $f(P_U(\bar{v})) \in U$. Det betyr at

$$P_U(f(P_U(\bar{v}))) = f(P_U(\bar{v})) .$$

$\Leftarrow$: Anta at $P_U \circ f \circ P_U \overset{(*)}{=} f \circ P_U$. For hver $\bar{u} \in U$ er $P_U(\bar{u}) \overset{(**)}{=} \bar{u}$, så

$$f(\bar{u}) \overset{(**)}{=} f(P_U(\bar{u})) \overset{(*)}{=} P_U(f(P_U(\bar{u}))) \in U,$$

som viser at U er f-invariant. $\square$

OPPGAVE S20.7

La $U = \mathrm{Im}\, P$. For hver $\bar{v} \in V$ har vi:

$$\bar{v} = \underbrace{P(\bar{v})}_{\in U} + (\bar{v} - P(\bar{v})).$$

antagelsen $P = P^2$

Her er $P(\bar{v} - P(\bar{v})) = P(\bar{v}) - P^2(\bar{v}) = \bar{0}$, altså

$\bar{v} - P(\bar{v}) \in \mathrm{Ker}\, P \subset U^\perp$

antagelse

Dette viser at $P(\bar{v}) = P_U(\bar{v})$, i.e. $P = P_U$. $\square$

OPPGAVE S20.8

$U \subset V$ er et endeligdimensjonalt underrom

Skal vise: $U = (U^\perp)^\perp$

$U \subset (U^\perp)^\perp$: La $\bar{u} \in U$. Da er $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0 \quad \forall \ \bar{v} \in U^\perp$. Altså, $\bar{u}$ er ortogonal med hver vektor i $U^\perp$, altså $\bar{u} \in (U^\perp)^\perp$.

OPPGAVE S20.8

$U \subset V$ er et endeligdimensjonalt underrom

Skal vise: $U = (U^\perp)^\perp$

$(U^\perp)^\perp \subset U$: La $\bar{v} \in (U^\perp)^\perp$. Ifølge TEOREM (ORTOGONAL PROJEKSJON) fra FORELESNING V20 kan vi skrive

$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$ med $\bar{u} \in U$ og $\bar{w} \in U^\perp$.

Det gir $\bar{v} - \bar{u} = \bar{w} \in U^\perp$. Siden $\bar{v} \in (U^\perp)^\perp$ og $\bar{u} \in (U^\perp)^\perp$ (vi har allerede vist at $U \subset (U^\perp)^\perp$), er også $\bar{v} - \bar{u} \in (U^\perp)^\perp$. Altså har vi

$$\bar{v} - \bar{u} \in U^\perp \cap (U^\perp)^\perp,$$

som impliserer at $\bar{u} = \bar{v}$. Det betyr at $\bar{v} \in U$.

OPPGAVE S20.9

a) Vi har

i) $\bar{0} \in U^{\perp}$

$(\langle \bar{0}, \bar{u} \rangle = 0 \quad \forall \quad \bar{u} \in V)$;

ii) $\bar{w}, \bar{v} \in U^{\perp} \Rightarrow \bar{w} + \bar{v} \in U^{\perp}$

$(\langle \bar{w} + \bar{v}, \bar{u} \rangle = \langle \bar{w}, \bar{u} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle = 0 \quad \forall \quad \bar{u} \in U)$;

iii) $c \in F, \bar{v} \in U^{\perp} \Rightarrow c\bar{v} \in U^{\perp}$

$(\langle c\bar{v}, \bar{u} \rangle = c \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle = 0 \quad \forall \quad \bar{u} \in U)$;

så $U^{\perp}$ er et underrom (PROPOSISJON I, FORELESNING V2)

b) La $\bar{u} \in U \cap U^{\perp}$. Da er $\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = 0$, så $\bar{u} = \bar{0}$ (aksiom ii)). Altså er $U \cap U^{\perp} = \{\bar{0}\}$.

OPPGAVE S20.9

c) Anta at $U \subset W$. For hver $\bar{v} \in W^{\perp}$ har vi $\langle \bar{v}, \bar{u} \rangle = 0 \quad \forall\, \bar{u} \in W$, så $\langle \bar{v}, \bar{u} \rangle = 0 \quad \forall\, \bar{u} \in U$. Altså er $\bar{v} \in U^{\perp}$, som viser at $W^{\perp} \subset U^{\perp}$.

d) Vi har $\langle \bar{v}, \bar{0} \rangle \quad \forall\, \bar{v} \in V$, i.e. $\bar{v} \in \{\bar{0}\}^{\perp} \quad \forall \bar{v} \in V$, i.e. $\{\bar{0}\}^{\perp} = V$.

e) La $\bar{v} \in V^{\perp}$. Da er $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0$, så $\bar{v} = \bar{0}$ (aksiom ii)). Dette viser at $V^{\perp} = \{\bar{0}\}$.

OPPGAVE S20.10

a) • La $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V$. Skriv

$$\bar{v}_1 = \bar{u}_1 + \bar{w}_1 \quad \text{og} \quad \bar{v}_2 = \bar{u}_2 + \bar{w}_2$$

med $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in U$ og $\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in U^\perp$. Da er

$$P_U(\bar{v}_1) = \bar{u}_1 \quad \text{og} \quad P_U(\bar{v}_2) = \bar{u}_2 .$$

Nå blir

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \underbrace{(\bar{u}_1 + \bar{u}_2)}_{\in U} + \underbrace{(\bar{w}_1 + \bar{w}_2)}_{\in U^\perp} ,$$

som betyr at

$$P_U(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 = P_U(\bar{v}_1) + P_U(\bar{v}_2).$$

• La $c \in F$ og $\bar{v} \in V$. Ligninga $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$ med $\bar{u} \in U$ og $\bar{w} \in U^\perp$ impliserer $c\bar{v} = c\bar{u} + c\bar{w}$ med $c\bar{u} \in U$ og $c\bar{w} \in U^\perp$. Altså er $P_U(c\bar{v}) = c P_U(\bar{v})$.

OPPGAVE S20.10

b) La $\bar{v} \in U$. Da er

$$\bar{v} = \bar{v} + \bar{0} \quad \text{med} \quad \bar{v} \in U \quad \text{og} \quad \bar{0} \in U^{\perp},$$

så $P_U(\bar{v}) = \bar{v}$.

c) La $\bar{w} \in U^{\perp}$. Da er

$$\bar{w} = \bar{0} + \bar{w} \quad \text{med} \quad \bar{0} \in U \quad \text{og} \quad \bar{w} \in U^{\perp},$$

så $P_U(\bar{w}) = \bar{0}$.

d) Vi har opplagt $\operatorname{Im} P_U \subset U$. Inklusjonen $U \subset \operatorname{Im} P_U$ følger fra b). Dette viser at $\operatorname{Im} P_U = U$.

OPPGAVE S20.10

e) Inklusjonen $U^\perp \subset \operatorname{Ker} P_U$ følger fra c). For å vise at $\operatorname{Ker} P_U \subset U^\perp$, la $\bar{v} \in \operatorname{Ker} P_U$. Da må den ORTOGONALE DEKOMPONERINGA av $\bar{v}$ være

$$\bar{v} = \underbrace{\bar{o}}_{P_U(\bar{v})} + \bar{v} \quad \text{med } \bar{o} \in U \text{ og } \bar{v} \in U^\perp.$$

Altså er $\operatorname{Ker} P_U \subset U^\perp$, så $\operatorname{Ker} P_U = U^\perp$.

f) For hver $\bar{v} \in V$ er

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w} \quad \text{med } \bar{u} \in U \text{ og } \bar{w} \in U^\perp,$$

så

$$\bar{v} - P_U(\bar{v}) = \bar{v} - \bar{u} = \bar{w} \in U^\perp.$$

OPPGAVE S20.10

g) La $\bar{v} \in V$. Vi har

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w} \quad \text{med} \quad \bar{u} \in U \quad \text{og} \quad \bar{w} \in U^{\perp},$$

så

$$P_U^2(\bar{v}) = P_U(P_U(\bar{v})) = P_U(\bar{u}) \overset{b)}{=} \bar{u} = P_U(\bar{v}).$$

h) La $\bar{v} \in V$. Vi har

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w} \quad \text{med} \quad \bar{u} \in U \quad \text{og} \quad \bar{w} \in U^{\perp},$$

så

$$\|P_U(\bar{v})\|^2 = \|\bar{u}\|^2 \leq \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{w}\|^2 \underset{\text{PYTHAGORAS}}{=} \|\bar{v}\|^2.$$

OPPGAVE S20.12

La V være indreproduktrommet av alle kontinuerlige funksjoner $[-\pi, \pi]$ med

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx .$$

Da er $U = \mathbb{R}[x]_{\leq 5}$ et underrom av V på den opplagte måten og det polynomet vi søker er den ortogonale projeksjonen $P_U(\sin x)$.

Vi nøyer oss med å oppgi at

$$P_U(\sin x) \approx 0{,}987862\, x - 0{,}155271\, x^3 + 0{,}00564312\, x^5 .$$

(Taylor-polynomet er $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$.)

HVEM ER BEST?