MA1202/6202

LØSNINGSFORSLAG TIL UTVALGTE OPPGAVER

SAMARBEIDSOPPGAVER S19

OPPGAVE S19.1

Her kan vi se(*) at

$$\phi(z_1, z_2, z_3, z_4) = z_1 - i z_3 + 2 z_4$$
$$= \langle (z_1, z_2, z_3, z_4), (1, 0, -i, 2) \rangle,$$

altså at

$$\phi = \langle -, \bar{v} \rangle \quad \text{for} \quad \bar{v} = (1, 0, -i, 2).$$

(*) Den som ikke "ser" dette med en gang, kan finne $\bar{v}$ som i BEVIS for TEOREM ! fra FORELESNING V19.

OPPGAVE S19.2

a) Fasit finnes på oppgavearket.

b) Dette er rutinemessig.

c) Beviset for TEOREM! fra FORELESNING V19 forteller oss at $\phi = \langle -, p \rangle$ for

$$p = \phi(\bar{e}_1)\bar{e}_1 + \phi(\bar{e}_2)\bar{e}_2 + \phi(\bar{e}_3)\bar{e}_3$$

hvor $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ er en vilkårlig ortonormal basis for dette indreproduktrommet. Vi bruker den ortonormale basisen fra a) og finner

$$p = \phi(1)\cdot 1 + \phi(\sqrt{3}(-1+2x))\sqrt{3}(-1+2x) + \phi(\sqrt{5}(1-6x+6x^2))\sqrt{5}(1-6x+6x^2)$$

$$= 1 + (-1+2x) + 0 = \underline{\underline{2x}}$$

OPPGAVE S19.3

Skal finne: $q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ slik at $p(1/2) = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx \quad \forall\, p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

God idé: Definér $\psi : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}$ ved

$$\psi(p) = p(1/2) \quad \forall\, p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$$

Merk at ψ er en lineær funksjonal. TEOREM! fra FORELESNING V19 sier at da finnes en $q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ slik at

$$p(1/2) = \psi(p) = \langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx \quad \forall\, p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2},$$

Vi VELGER å utstyre $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ med dette indreproduktet!

Polynomet q er altså akkurat det oppgaven etterspør!

OPPGAVE S19.3

Beviset for dette resultatet forteller oss hvordan vi kan konstruere polynomet q, nemlig som

$$q = \psi(\bar{e}_1)\bar{e}_1 + \psi(\bar{e}_2)\bar{e}_2 + \psi(\bar{e}_3)\bar{e}_3$$

hvor $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ er en vilkårlig ortonormal basis for dette indreproduktrommet. Vi bruker den ortonormale basisen fra S19.2 a) og finner

$$q = \psi(1)\cdot 1 + \psi\left(\sqrt{3}(-1+2x)\right)\sqrt{3}(-1+2x) + \psi\left(\sqrt{5}(1-6x+6x^2)\right)\sqrt{5}(1-6x+6x^2)$$

$\psi(p) = p(1/2)$

$$= 1 + 0 + \sqrt{5}\left(1-3+\tfrac{3}{2}\right)\sqrt{5}(1-6x+6x^2)$$

$$= -\frac{3}{2} + 15(x-x^2)$$

OPPGAVE 519.4

$\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ er lineært uavhengig i et indreproduktrom V.

Skal vise: $\exists\ \bar{w} \in V$ s.a. $\langle \bar{v}_i, \bar{w} \rangle > 0 \quad \forall\ 1 \le i \le n$.

La $W = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n) \subset V$. Da er $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ en basis for W per antagelse. Så vi kan definere en lineær funksjonal $\phi : W \longrightarrow F$ ved regelen

$$\phi(a_1\bar{v}_1 + \ldots + a_n\bar{v}_n) = a_1 + \ldots + a_n .$$

Ved TEOREM! fra FORELESNING V19 finnes en $\bar{w} \in V$ slik at $\phi = \langle -, \bar{w} \rangle$. Spesielt får vi

$$0 < 1 = \phi(\bar{v}_i) = \langle \bar{v}_i, \bar{w} \rangle \quad \forall\ 1 \le i \le n.$$

OPPGAVE S19.5

V er et reelt indreproduktrom og $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subset V$ er lineært uavhengig.

Skal vise: Det finnes nøyaktig 2^n ortonormale delmengder $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\} \subset V$ med

$$\text{span}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i) = \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_i) \quad \forall\ 1 \le i \le n$$

Vi bruker induksjon på i. Tilfellet $i = 1$ er ok (vi kan velge $\bar{e}_1 = \dfrac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|}$ eller $\bar{e}_1 = -\dfrac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|}$).

OPPGAVE S19.5

Anta nå at vi har valgt ortonormale vektorer $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{i-1}$ slik at $\text{span}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{i-1}) = \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{i-1})$.

Gram–Schmidt-prosessen produserer en ortonormal mengde $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i\}$ med

$$\text{span}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i) = \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_i).$$

Det er klart at også $\{\bar{e}_1, \dots, -\bar{e}_i\}$ er ortonormal med

$$\text{span}(\bar{e}_1, \dots, -\bar{e}_i) = \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_i).$$

Så det er nok å vise: Hvis $\bar{e}_i'$ er slik at $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i'\}$ er ortonormal med

$$\text{span}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i') = \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_i),$$

så må $\boxed{\bar{e}_i' = \bar{e}_i \quad \text{eller} \quad \bar{e}_i' = -\bar{e}_i}$.

OPPGAVE S19.5

Så anta at $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i'\}$ er ortonormal med

$$\operatorname{span}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i') = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_i).$$

Da er $\bar{e}_i' \in \operatorname{span}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i)$ som gir

$$\bar{e}_i' = \langle \bar{e}_i', \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \dots + \langle \bar{e}_i', \bar{e}_i \rangle \bar{e}_i$$

Teorem(!)
Forelesning V18

$$= \langle \bar{e}_i', \bar{e}_i \rangle \bar{e}_i$$

$\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i'\}$ er ortonormal

Siden $\|\bar{e}_i'\| = 1 = \|\bar{e}_i\|$ impliserer dette $|\langle \bar{e}_i', \bar{e}_i \rangle| = 1$,
altså $\langle \bar{e}_i', \bar{e}_i \rangle = \pm 1$, altså

$$\bar{e}_i' = \bar{e}_i \quad \text{eller} \quad \bar{e}_i' = -\bar{e}_i.$$

$\square$

OPPGAVE S19.6

a) Dette er rettfram.

b) Skal vise: Det finnes ingen $g \in V$ slik at

$$\phi(f) = \langle f, g \rangle \quad \forall \quad f \in V.$$

Anta at en slik g eksisterer. Da er altså

$$f(0) = \phi(f) = \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx \quad \forall \quad f \in V.$$

Spesielt kan vi velge $f(x) = x^2 g(x)$. Da blir

$$\int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx = \int_{-1}^{1} |x\, g(x)|^2\, dx = f(0) = 0.$$

OPPGAVE S19.6

b) Se nå på $h(x) = x\,g(x)$. Siden h er kontinuerlig på $[-1,1]$, eksisterer et intervall $[a,b] \subseteq [-1,1]$ slik at $h(x) \neq 0 \ \forall\, x \in [a,b]$.
Ved "ekstremalverdisetningen" har funksjonen $h(x)^2$ et minimum i et punkt $m \in [a,b]$. Da vet vi at $h(m)^2 > 0$, så vi får

$$0 = \int_{-1}^{1} |x\,g(x)|^2\,dx = \int_{-1}^{1} h(x)^2\,dx \geq \int_{a}^{b} h(x)^2\,dx \geq (b-a)\,h(m)^2 > 0$$

Dette er absurd. Altså, en slik g kan ikke eksistere.