# LØSNINGSFORSLAG TIL UTVALGTE OPPGAVER

## SAMARBEIDSOPPGAVER S18

## OPPGAVE S18.1

Her nøyer vi oss med å oppgi fasit:

Gram-Schmidt-prosessen gir oss den følgende ortonormale basisen for $\mathbb{C}^3$:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(i, i, i), \frac{1}{\sqrt{6}}(-2i, i, i), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -i, i) \right\}$$

## OPPGAVE S18.2

Skriv

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \bar{e}_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\,x \quad \text{og} \quad \bar{e}_3 = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

Her kan vi bruke TEOREM (!) fra FORELESNING V18, som sier at for hver $\bar{v} \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ er

$$\bar{v} = \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \langle \bar{v}, \bar{e}_2 \rangle \bar{e}_2 + \langle \bar{v}, \bar{e}_3 \rangle \bar{e}_3$$

## OPPGAVE S18.2

a) Her er $\bar{v} = 1 + x + x^4$ og

$$\langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle = \int_{-1}^{1} (1 + x + x^4) \frac{1}{\sqrt{2}} \, dx = \frac{7\sqrt{2}}{3};$$

$$\langle \bar{v}, \bar{e}_2 \rangle = \int_{-1}^{1} (1 + x + x^4) \sqrt{\frac{3}{2}} \, x \, dx = \sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$\langle \bar{v}, \bar{e}_3 \rangle = \int_{-1}^{1} (1 + x + x^4) \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{5}};$$

så

$$1 + x + x^4 = \frac{7\sqrt{2}}{3} \bar{e}_1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \, \bar{e}_2 + \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \bar{e}_3$$

$$= \underline{\underline{\frac{7\sqrt{2}}{3} \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{3}{2}} \, x + \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)}}.$$

## OPPGAVE S18.2

b) Her er $\bar{v} = 2-7x^2$ og

$$\langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle = \int_{-1}^{1} (2-7x^2)\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{3};$$

$$\langle \bar{v}, \bar{e}_2 \rangle = \int_{-1}^{1} (2-7x^2)\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\,dx = 0;$$

$$\langle \bar{v}, \bar{e}_3 \rangle = \int_{-1}^{1} (2-7x^2)\sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)dx = -\frac{14\sqrt{2}}{3\sqrt{5}};$$

så

$$2-7x^2 = -\frac{\sqrt{2}}{3}\bar{e}_1 + 0\,\bar{e}_2 - \frac{14\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}\bar{e}_3$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{14\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}\sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$$

OPPGAVE S18.2

c) Her er $\bar{v} = 4+3x$ og

$$\langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle = \int_{-1}^{1} (4+3x)\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx = 4\sqrt{2} \;;$$

$$\langle \bar{v}, \bar{e}_2 \rangle = \int_{-1}^{1} (4+3x)\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\,dx = \sqrt{6} \;;$$

$$\langle \bar{v}, \bar{e}_3 \rangle = \int_{-1}^{1} (4+3x)\sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)dx = 0 \;;$$

så

$$4+3x = 4\sqrt{2}\,\bar{e}_1 + \sqrt{6}\,\bar{e}_2 + 0\,\bar{e}_3$$

$$= 4\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{6}\sqrt{\frac{3}{2}}\,x$$

# OPPGAVE S18.3

a) Mengden $\beta = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ er lineært uavhengig, så vi kan finne en ortonormal basis for span$(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ ved å bruke Gram-Schmidt-prosessen på $\beta$: Dette gir

$$\underline{\underline{\left\{ \overbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{=\bar{e}_1}, \overbrace{\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{=\bar{e}_2}, \overbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{=\bar{e}_3} \right\}}}.$$

## OPPGAVE S18.3

b) Siden $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ er ortonormal, blir

$$\bar{v} = \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \langle \bar{v}, \bar{e}_2 \rangle \bar{e}_2 + \langle \bar{v}, \bar{e}_3 \rangle \bar{e}_3$$

TEOREM(!) fra FORELESNING V18

$$= \underline{\underline{2\bar{e}_1 + 4\sqrt{3}\,\bar{e}_2 + \sqrt{6}\,\bar{e}_3}}.$$

## OPPGAVE S18.4

a) Dette er klart.

Det er nok å sjekke at $\beta_1$ og $\beta_2$ er ortonormale mengder.

Vi sjekker $\beta_1$:

$$\langle (\cos\theta, \sin\theta), (\cos\theta, \sin\theta) \rangle = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\langle (-\sin\theta, \cos\theta), (-\sin\theta, \cos\theta) \rangle = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\langle (\cos\theta, \sin\theta), (-\sin\theta, \cos\theta) \rangle = -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta = 0$$

# OPPGAVE S18.4

b) La $\beta = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ være en ortonormal basis.

Skal vise: Det finnes en $\theta \in \mathbb{R}$ slik at

$$\beta = \{(\cos\theta, \sin\theta)\ (-\sin\theta, \cos\theta)\}$$

eller

$$\beta = \{(\cos\theta, \sin\theta)\ (\sin\theta, -\cos\theta)\}$$

Siden $\|\bar{e}_1\| = \|\bar{e}_2\| = 1$ ligger $\bar{e}_1$ og $\bar{e}_2$ på enhetssirkelden i $\mathbb{R}^2$. Det betyr at det finnes $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi\rangle$ slik at

$$\bar{e}_1 = (\cos\theta_1, \sin\theta_1) \quad \text{og} \quad \bar{e}_2 = (\cos\theta_2, \sin\theta_2)$$

## OPPGAVE S18.4

b) Kravet $\langle \bar{e}_1 , \bar{e}_2 \rangle = 0$ betyr

$$0 = \langle (\cos\theta_1 , \sin\theta_1), (\cos\theta_1 , \sin\theta_1) \rangle$$

$$= \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2),$$

som impliserer

$$\theta_2 = \theta_1 \pm \frac{\pi}{2} .$$

Disse to mulighetene gir

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \bar{e}_2 = (-\sin\theta_1 , \cos\theta_1)$$

$$\theta_2 = \theta_1 - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \bar{e}_2 = (\sin\theta_1 , -\cos\theta_1),$$

som var det vi skulle vise (med $\theta = \theta_1$). $\square$

## OPPGAVE S18.5

Hvis $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ er lineært avhengig, så finnes en minste $i$ slik at $\bar{v}_i \in \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{i-1})$. Da vil Gram-Schmidt-prosessen produsere en ortonormal mengde $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{i-1}\}$, men $\bar{e}_i$ eksisterer ikke:

$$\bar{e}_i = \text{"}\frac{\overbrace{\bar{v}_i - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_1\rangle \bar{e}_1 - \dots - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_{i-1}\rangle \bar{e}_{i-1}}^{=\bar{0} \text{ siden } \bar{v}_i = \langle \bar{v}_i, \bar{e}_1\rangle \bar{e}_1 - \dots - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_{i-1}\rangle \bar{e}_{i-1}}}{\underbrace{\| \bar{v}_i - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_1\rangle \bar{e}_1 - \dots - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_{i-1}\rangle \bar{e}_{i-1} \|}_{=0}}\text{"} = \text{"}\frac{\bar{0}}{0}\text{"}$$

(Hvis vi vil ha en ortonormal basis for $\text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$, kan vi redusere $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ til en basis for $\text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ (PROPOSISJON I i), FORELESNING V4) og gjøre Gram-Schmidt på denne.)

# OPPGAVE S18.6

a) Vi vet (FORELESNING V17) at $\langle - , \bar{v} \rangle : V \longrightarrow F$ er en lineærtransformasjon for hver $\bar{v} \in V$. Derfor er spesielt $\langle \bar{0} , \bar{v} \rangle \overset{(*)}{=} 0$. Det følger at også $\langle \bar{v} , \bar{0} \rangle \overset{v)}{=} \overline{\langle \bar{0} , \bar{v} \rangle} \overset{(*)}{=} \overline{0} = 0$.

Tallet null er nullvektoren i F

b)
$$\begin{aligned}
\langle \bar{u} , \bar{v} + \bar{w} \rangle &\overset{v)}{=} \overline{\langle \bar{v} + \bar{w} , \bar{u} \rangle} \\
&\overset{iii)}{=} \overline{\langle \bar{v} , \bar{u} \rangle + \langle \bar{w} , \bar{u} \rangle} \\
&= \overline{\langle \bar{v} , \bar{u} \rangle} + \overline{\langle \bar{w} , \bar{u} \rangle} \overset{v)}{=} \langle \bar{u} , \bar{v} \rangle + \langle \bar{u} , \bar{w} \rangle .
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
\langle \bar{u} , c\bar{v} \rangle &\overset{v)}{=} \overline{\langle c\bar{v} , \bar{u} \rangle} \\
&\overset{iv)}{=} \overline{c \langle \bar{v} , \bar{u} \rangle} \\
&= \overline{c}\, \overline{\langle \bar{v} , \bar{u} \rangle} \overset{v)}{=} \overline{c} \langle \bar{u} , \bar{v} \rangle .
\end{aligned}$$

## OPPGAVE S18.7

a) $\|\bar{v}\| = 0 \overset{\text{DEF}}{\Longleftrightarrow} \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0 \overset{\text{ii)}}{\Longleftrightarrow} \bar{v} = \bar{0}.$

b) Det holder å observere at

$$
\begin{aligned}
\|c\bar{v}\|^2 &\overset{\text{DEF}}{=} \langle c\bar{v}, c\bar{v} \rangle \\
&\overset{\text{iv)}}{=} c\langle \bar{v}, c\bar{v} \rangle \\
&\overset{\text{S18.6 c)}}{=} c\,\bar{c}\,\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \\
&= |c|^2 \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \overset{\text{DEF}}{=} |c|^2 \|\bar{v}\|^2.
\end{aligned}
$$

# OPPGAVE S18.8

a) Dette viste vi i: S18.6 a)

b) La $\bar{v} \in V$ være ortogonal med hver vektor i $V$.
Da må spesielt $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0$ og dette betyr
at $\bar{v} = \bar{0}$ (aksiom ii)).

# OPPGAVE S18.9

a) Dette er forhåpentligvis rutinemessig.

b) Dette er ikke et indreprodukt: Se for eksempel på

$$p(x) = x^2 - x = x(x-1).$$

Da er $p(x) \neq \bar{0}$ i $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, men

$$\langle p(x), p(x) \rangle = p(0)^2 + p(1)^2 = 0^2 + 0^2 = 0,$$

så aksiom ii) holder ikke.

c) Her nøyer vi oss med å oppgi fasit:
Dette er et indreprodukt hvis og bare hvis $k \geq n$.

## OPPGAVE S18.10

a) Dette er rutinemessig

b) Indreproduktet i a) "stammer fra $\mathbb{R}^3$" i den forstand at det er den funksjonen vi får ved å

- først bruke isomorfien $\mathbb{R}[x]_{\leq n} \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^3$ bestemt av $1 \longmapsto \bar{e}_1$ ; $x \longmapsto \bar{e}_2$ ; $x^2 \longmapsto \bar{e}_3$ , og
- deretter ta euklidsk indreprodukt $\langle -,- \rangle$.

Altså, indreproduktet i a) er komposisjonen

$$\mathbb{R}[x]_{\leq 2} \times \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$(p, q) \longmapsto (\phi(p), \phi(q)) \longmapsto \langle \phi(p), \phi(q) \rangle$$