MA1202/6202

LØSNINGSFORSLAG TIL UTVALGTE OPPGAVER

SAMARBEIDSOPPGAVER S16

OPPGAVE S16.1

Her ser vi på en Markov-kjede med regulær overgangsmatrise $P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix}$.

Vi er ute etter (den eneste) sannsynlighetsvektoren $\bar{x}$ som ligger i egenrommet E_1, altså som oppfyller $P\bar{x} = \bar{x}$.
Egenrommet til 1 er likt nullrommet til matrisa

$$I_{2\times 2} - P = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.3 \\ -0.4 & 0.3 \end{pmatrix},$$

så det er klart at $E_1 = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$. Det betyr at vi var ute etter vektoren $\bar{x} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{pmatrix}$, og at

$\approx 57\%$ går til Tura på sikt

OPPGAVE S16.2

Dette er en Markov-kjede med regulær overgangsmatrise $P = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$.

Vi er ute etter (den eneste) sannsynlighetsvektoren $\bar{x}$ som ligger i egenrommet E_1, altså som oppfyller $P\bar{x} = \bar{x}$. Egenrommet til 1 er likt nullrommet til matrisa

$$I_{2\times 2} - P = \begin{pmatrix} 0.25 & -0.5 \\ -0.25 & 0.5 \end{pmatrix},$$

så det er klart at $E_1 = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Det betyr at vi var ute etter vektoren $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$, og at $\approx 67\%$ spiser på A på sikt.

OPPGAVE S16.3

a) Overgangsmatrisa blir $P = \begin{pmatrix} 4/5 & 2/3 \\ 1/5 & 1/3 \end{pmatrix}$

b) P er regulær, så den stabile tilstandsvektoren er den entydige sannsynlighetsvektoren $\bar{x}$ som oppfyller $P\bar{x} = \bar{x}$, altså $(I - P)\bar{x} = \bar{0}$.
Nullrommet til

$$I - P = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/3 \\ -1/5 & 2/3 \end{pmatrix}$$

er gitt som span$\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$, så den stabile tilstandsvektoren er

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 10/13 \\ 3/13 \end{pmatrix}$$

OPPGAVE S16.3

c) Den stabile tilstandsvektoren forteller oss hvor sannsynlig hver tilstand er på sikt, uavhengig av nåværende tilstand.

Så, uavhengig av Tom sitt humør i dag, i det lange løp er sannsynligheten for at Tom er glad på en gitt dag omtrent $\underline{\underline{77\%}}$.

OPPGAVE S16.4

Dette er en Markov-kjede med regulær overgangsmatrise $P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$.

Vi er ute etter (den eneste) sannsynlighetsvektoren $\bar{x}$ som ligger i egenrommet E_1, altså som oppfyller $P\bar{x} = \bar{x}$.
Egenrommet til 1 er likt nullrommet til matrisa

$$I_{2\times 2} - P = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.5 \\ -0.1 & 0.5 \end{pmatrix},$$

så det er klart at $E_1 = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Det betyr at vi var ute etter vektoren $\bar{x} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}$, og at

$\approx 83\%$ av maurene er på tue A etter mange netter.

OPPGAVE S16.5

Her nøyer vi oss med å oppgi fasit:

Den stabile tilstandsvektoren er $\underline{\underline{\begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{pmatrix}}}$.

OPPGAVE S16.6

a) Her nøyer vi oss med å oppgi fasit:

Egenverdiene er 1 og 0,6.

Basis for egenrommet E_1 : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Basis for egenrommet E_1 : $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

OPPGAVE S16.6

b) Her nøyer vi oss med å oppgi fasit:

Vi har $P^{-1}MP = D$ med

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}$$

OPPGAVE S16.6

c) Her har vi en Markov-prosess med overgangs-matrise M!

På den gitte dagen er fordelinga gitt som

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.8 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

Vi er altså ute etter sannsynlighetsvektoren $M^5 \cdot \bar{x}$.

Heldigvis fant vi i b) at M er diagonaliserbar, så $M^n = PD^nP^{-1} \ \forall \ n \geq 1$.

OPPGAVE S16.6

c) Det betyr at

$$\boxed{M^5 \cdot x} = PD^5P^{-1}\bar{x}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.8 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.8 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.48 \\ 0.42 \end{pmatrix}}$$

Så etter fem dager spiser 10 vegetar, 48 kjøtt og 42 fisk.

OPPGAVE S16.7

La A være ei stokastisk matrise.

Skal vise: Tallet 1 er en egenverdi for A.

Ekvivalent: Ligninga $A\bar{x} = \bar{x}$ har ikke-triviell løsning

Ekvivalent: Ligninga $(A - I)\bar{x} = \bar{0}$ har ikke-triviell løsning

Siden A er stokastisk, blir summen av elementene i hver kolonne i matrisa $A - I$ lik 0. Det betyr at radene i $A - I$ danner en lineært avhengig mengde, så ligninga $(A - I)\bar{x} = \bar{0}$ har ikke-triviell løsning (dette husker vi fra MA1201).

OPPGAVE S16.8 — 12

Under "Tidligere eksamenssett" på wiki-sida finnes et løsningsforslag til disse oppgavene.