MA1202/6202

LØSNINGSFORSLAG TIL UTVALGTE OPPGAVER

SAMARBEIDSOPPGAVER S15

OPPGAVE S15.1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $$\text{charpol}_A = \det(A - x \cdot I_{2\times2}) = \det\begin{pmatrix} 2-x & -1 \\ -1 & 2-x \end{pmatrix} = (2-x)^2 - 1$$
$$= (x-1)(x-3),$$

så egenverdiene til A er 1 og 3.

Vi finner (basiser for) egenrommene:

- $A - 1 \cdot I_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1 = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

- $A - 3 \cdot I_{3\times3} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_3 = \text{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Det betyr at for $\underline{\underline{P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}}$ er $P^{-1}AP$ diagonal

OPPGAVE S15.1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Systemet vi skal løse er $A\bar{y} = \bar{y}'$ hvor

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \bar{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}.$$

Vi vet fra a) at $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =: D$. Så la

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \bar{z} = P^{-1}\bar{y}.$$

Poenget med denne substitusjonen er at vi får

$$\bar{z}' = D\bar{z},$$

altså systemet

$$z_1' = z_1$$
$$z_2' = 3z_2,$$

som har opplagt løsning: $z_1(t) = c_1 e^{t}$; $z_2(t) = c_2 e^{3t}$.

OPPGAVE S15.1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) For å løse det opprinnelige systemet finner vi

$$\bar{y} = P\bar{z},$$

altså

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

altså

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= z_1(t) - z_2(t) = c_1 e^{t} - c_2 e^{3t} \\ y_2(t) &= z_1(t) + z_2(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{3t} \end{aligned}\right\} \text{GENERELL LØSNING}$$

OPPGAVE S15.2

a) Systemet vi skal løse er $A\bar{y} = \bar{y}'$ med

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \bar{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}.$$

Her er $\text{charpol}_A = (x-5)(x+1)$, så egenverdiene til A er 5 og -1. De respektive egenrommene er

$$E_5 = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{og} \quad E_{-1} = \text{span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Da vet vi at for $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ har vi

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =: D.$$

Substitusjonen $\bar{y} = P\bar{z}$ og $\bar{y}' = P\bar{z}'$ gir nå et "diagonalt" system, nemlig

OPPGAVE S15.2

$$\bar{z}' = D\bar{z} \,,$$

altså

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

altså

$$z_1' = 5z_1$$

$$z_2' = -z_2 .$$

Dette systemet har opplagt løsning:

$z_1(t) = c_1 e^{5t}$ og $z_2(t) = c_2 e^{-t}$.

OPPGAVE S15.2

Nå kan vi substituere tilbake og finne $\bar{y}$:

$$\bar{y} = P\bar{z},$$

altså

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

altså

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= z_1(t) - 2z_2(t) = c_1 e^{5t} - 2c_2 e^{-t} \\ y(t) &= z_1(t) + z_2(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t} \end{aligned}\right\} \text{GENERELL LØSNING}$$

OPPGAVE S15.2

b) Fra a) vet vi at enhver løsning er på formen

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 e^{5t} - 2c_2 e^{-t} \\ y(t) &= c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t} \end{aligned}\right\} (*)$$

for konstanter c_1 og c_2.

Hvis vi krever $y_1(0) = 0$ og $y_2(0) = 0$, så blir $(*)$ til systemet

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 - 2c_2 \\ 0 &= c_1 + c_2 \end{aligned}$$

Dette impliserer $c_1 = c_2 = 0$, så den løsningen vi var ute etter er ganske kjedelig, nemlig

$$\underline{\underline{y_1(t) = 0 \quad \text{og} \quad y_2(t) = 0}}.$$

OPPGAVE S15.3

a) Her nøyer vi oss med å oppgi fasit:

Den generelle løsningen er

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= \phantom{c_1 e^{t}} \quad - c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} \\
y_2(t) &= c_1 e^{t} + 2 c_2 e^{2t} - c_3 e^{3t} \\
y_3(t) &= \phantom{c_1 e^{t}} \quad\ \ 2 c_2 e^{2t} - c_3 e^{3t} .
\end{aligned}$$

OPPGAVE S15.3

b) Vi vet fra a) at enhver løsning er på formen

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= -c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} \\ y_2(t) &= c_1 e^{t} + 2c_2 e^{2t} - c_3 e^{3t} \\ y_3(t) &= 2c_2 e^{2t} - c_3 e^{3t} \end{aligned}\right\} (*)$$

Hvis vi krever $y_1(0) = -1$, $y_2(0) = 1$ og $y_3(0) = 0$, så blir $(*)$ til systemet

$$\begin{aligned} -1 &= -c_2 + c_3 \\ 1 &= c_1 + 2c_2 - c_3 \\ 0 &= 2c_2 - c_3. \end{aligned}$$

OPPGAVE S15.3

Dette impliserer $c_1 = 1$, $c_2 = -1$ og $c_3 = -2$, så den løsningen vi var ute etter er

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= \qquad\quad e^{2t} - 2e^{3t} \\
y_2(t) &= e^{t} - 2e^{2t} + 2e^{3t} \\
y_3(t) &= \qquad -2e^{2t} + 2e^{3t}
\end{aligned}
$$

OPPGAVE S15.4

La A og B være similare matriser.
Skal vise: A diagonaliserbar $\Rightarrow$ B diagonaliserbar

Siden A og B er similare finnes ei inverterbar matrise Q slik at $A \overset{(*)}{=} Q^{-1}BQ$.

Anta at A er diagonaliserbar. Da finnes ei inverterbar matrise P slik at $P^{-1}AP \overset{(**)}{=} D$ er diagonal.

Dermed blir matrisa QP inverterbar $\left((QP)^{-1} = P^{-1}Q^{-1}\right)$, så

$$(QP)^{-1}B(QP) = P^{-1}Q^{-1}BQP \overset{(*)}{=} P^{-1}AP \overset{(**)}{=} D,$$

som viser at B er diagonaliserbar.

OPPGAVE S15.5

a) Her nøyer vi oss med å oppgi fasit:

Egenverdiene til A er $\underline{\underline{-1 \text{ og } 5}}$.

b) Her nøyer vi oss med å oppgi fasit:

Egenrommene er $\underline{\underline{E_{-1} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \text{ og } E_5 = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}}$.

c) Vi vet nå at $\underline{\underline{\text{for } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ blir } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}}$.

OPPGAVE S15.5

d) I c) fant vi ut at $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} =: D$. Da blir

$$\left.\begin{aligned} A &= PDP^{-1} \\ A^2 &= PD^2P^{-1} \\ A^3 &= PD^3P^{-1} \end{aligned}\right\} \quad \text{Husk S14.1}$$

Dette betyr at

$$\begin{aligned} A^3 - 5A^2 + 3A + I_{2\times 2} &= (PDP^{-1})^3 - 5(PDP^{-1})^2 + 3PDP^{-1} + I_{2\times 2} \\ &= P(\underbrace{D^3 - 5D^2 + 3D + I_{2\times 2}}_{\text{Dette er ei diagonal matrise!}})P^{-1}, \end{aligned}$$

så P diagonaliserer også matrisa $A^3 - 5A^2 + 3A + I_{2\times 2}$!

(Altså,

$$\begin{aligned} P^{-1}(A^3 - 5A^2 + 3A + I_{2\times 2})P &= D^3 - 5D^2 + 3D + I_{2\times 2} \\ &= \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

)

OPPGAVE S15.5

e) Vi diagonaliserte A i c), så på samme måte som i S14.1 får vi:

$$A^{100} = PD^{100}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^{100} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^{100} & 0 \\ 0 & 5^{100} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 + 5^{100} & -1 + 5^{100} \\ -2 + 2 \cdot 5^{100} & 1 + 2 \cdot 5^{100} \end{pmatrix}}}$$

OPPGAVE S15.5

f) Vi diagonaliserte $A^3 - 5A^2 + 3A + I_{2\times 2}$ i d), så på samme måte som i S14.1 får vi:

$$\left(A^3 - 5A^2 + 3A + I_{2\times 2}\right)^{100} = P\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}^{100} P^{-1}$$

$$= \text{regne regne regne}$$

$$= \frac{2^{300}}{3}\begin{pmatrix} 2+2^{100} & -1+2^{100} \\ -2+2\cdot 2^{100} & 1-2\cdot 2^{100} \end{pmatrix}.$$

OPPGAVE S15.6

a) Uttrykket

$$\lim_{i \to \infty} M_i = M$$

betyr at M er ei matrise av samme størrelse som hver M_i og at

$$\underbrace{\lim_{i \to \infty} (M_i)_{a,b} = M_{a,b}}$$

for hver posisjon (a,b).

Dette er "vanlig" konvergens av en følge av tall!

OPPGAVE S15.6

b) Skriv

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Oppgaveteksten gir altså at

$$A\bar{v}_1 = \bar{v}_1 \quad , \quad A\bar{v}_2 = \frac{1}{2}\cdot\bar{v}_2 \quad \text{og} \quad A\bar{v}_3 = \frac{1}{3}\cdot\bar{v}_3 .$$

OPPGAVE S15.6

LØSNING 1

Observér (altså, regn ut) at $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ er lineært uavhengig i $\mathbb{R}^3$, og dermed en basis (husk PROPOSISJON II i) fra FORELESNING V4). Derfor må det finnes (entydige) $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ slik at

$$\bar{x} = c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2 + c_3 v_3 . \quad (*)$$

En rutinemessig utregning viser at $(*)$ har løsning $c_1 = \frac{2}{3}$, $c_2 = \frac{17}{6}$, $c_3 = \frac{5}{9}$.

Altså er

$$\bar{x} = \frac{2}{3} \bar{v}_1 + \frac{17}{6} \bar{v}_2 + \frac{5}{9} \bar{v}_3 .$$

OPPGAVE S15.6

Da blir, ifølge opplysningen i oppgaveteksten,

$$A\bar{x} = A\left(\frac{2}{3}\bar{v}_1 + \frac{17}{6}\bar{v}_2 + \frac{5}{9}\bar{v}_3\right)$$

$$= \frac{2}{3}A\bar{v}_1 + \frac{17}{6}A\bar{v}_2 + \frac{5}{9}A\bar{v}_3$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 1\cdot\bar{v}_1 + \frac{17}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\bar{v}_2 + \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{3}\cdot\bar{v}_3 .$$

Hva så med $A^2\bar{x}$? Jo, på samme vis får vi:

$$A^2\bar{x} = A\left(\frac{2}{3}\cdot 1\cdot\bar{v}_1 + \frac{17}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\bar{v}_2 + \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{3}\cdot\bar{v}_3\right)$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 1^2\cdot\bar{v}_1 + \frac{17}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\bar{v}_2 + \frac{5}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\bar{v}_3 ,$$

OPPGAVE S15.6

og det er klart at

$$A^i \bar{x} = \frac{2}{3} \cdot 1^i \cdot \bar{v}_1 + \frac{17}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i \bar{v}_2 + \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^i \bar{v}_3 \qquad \forall\ i \geq 0.$$

Det følger at

$$\underline{\underline{\lim_{i \to \infty} A^i \bar{x} = \frac{2}{3} \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}}}$$

OPPGAVE S15.6

LØSNING 2

Oppgaveteksten gir umiddelbart at 1, $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{3}$ er egenverdiene til A, og at

$$E_1 = \text{span}(\bar{v}_1), \quad E_{\frac{1}{2}} = \text{span}(\bar{v}_2) \quad \text{og} \quad E_{\frac{1}{3}} = \text{span}(\bar{v}_3).$$

Derfor er $A = PDP^{-1}$ hvor

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

OPPGAVE S15.6

Det betyr at $A^i = PD^iP^{-1}$ $\forall$ $i \geq 1$, så

$$\lim_{i \to \infty} A^i \bar{x} = \lim_{i \to \infty} PD^iP^{-1}\bar{x}$$

$$= P \cdot \left(\lim_{i \to \infty} D^i \right) \cdot P^{-1} \bar{x}$$

Dette har vi ikke vist!

$$= P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \bar{x} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

OPPGAVE S15.7

a) Dette klarer leseren selv.

b) Her nøyer vi oss med å oppgi fasit:

$$\underline{\underline{y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2x}}}$$

OPPGAVE S15.8

a) Leseren kan selv sjekke at hvis vi lar

$$y_1 = y, \quad y_2 = y' \quad \text{og} \quad y_3 = y'',$$

så får vi systemet

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= 6y_1 - 11y_2 + 6y_3 \end{aligned}$$

b) Her nøyer vi oss med å oppgi fasit:

$$\underline{\underline{y(t) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}}}$$

OPPGAVE S15.9 – 11

Under "Tidligere eksamenssett" på wiki-sida finnes et løsningsforslag til disse oppgavene.