MA1202/6202

LØSNINGSFORSLAG TIL UTVALGTE OPPGAVER

SAMARBEIDSOPPGAVER S14

OPPGAVE 514.1

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Heldigvis er A diagonaliserbar! Vi har

$$\mathrm{charpol}_A = (x-5)(x-4),$$

så egenverdiene til A er 5 og 4 med egenrom

$$E_5 = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{og} \quad E_4 = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

Da vet vi at for $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (og $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$) er

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = D.$$

Dette betyr at

$$A = PDP^{-1},$$

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD\cancel{P^{-1}}\cancel{P}DP^{-1} = PD^2P^{-1},$$

$$A^3 = (PD^2P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2\cancel{P^{-1}}\cancel{P}DP^{-1} = PD^3P^{-1},$$

og generelt $A^n = PD^nP^{-1} \quad \forall \quad n \geq 1.$

OPPGAVE S14.1

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Spesielt blir

$$A^{1000} = P D^{1000} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{1000} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^{1000} & 0 \\ 0 & 4^{1000} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \cdot 5^{1000} - 4^{1000} & -5^{1000} + 4^{1000} \\ 2 \cdot 5^{1000} - 2 \cdot 4^{1000} & -5^{1000} + 2 \cdot 4^{1000} \end{pmatrix}}}$$

OPPGAVE S14.2

Siden M er diagonaliserbar finnes ei inverterbar matrise P slik at

$$P^{-1} M P = D.$$

Merk at her er D ei diagonal matrise med kun 0-ere og 1-ere på diagonalen. Det betyr at $D^k = D \;\; \forall \;\; k \geq 1$ (!).

Som i S14.1 får vi

$$\underline{\underline{\boxed{M^k} = P D^k P^{-1} = P D P^{-1} \boxed{= M}}} \quad \forall \quad k \geq 1.$$

EKSEMPEL:

$$M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

OPPGAVE S14.3

Det at (ii), (iii) og (iv) er ekvivalente, er (formodentlig) et velkjent faktum. Se eventuelt samarbeidsoppgave S6.4 for en påminnelse.

Så det holder nå å vise (i) <=> (ii). Men ligninga $f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$ er ekvivalent med ligninga

$$(f - \lambda \cdot id_V)(\bar{v}) = \bar{0},$$

så også (i) <=> (ii) er klart.

OPPGAVE S14.4

a) Skal vise: 9 er en egenverdi for f^2

$\Longleftrightarrow$

3 eller -3 er en egenverdi for f

$\Rightarrow$: Anta at 9 er en egenverdi for f^2. Da finnes en tilhørende egenvektor $\bar{0} \neq \bar{v} \in V$ slik at

$$f^2(\bar{v}) = 9\bar{v}.$$

Oppgave 3 gir da at operatoren

$$f^2 - 9 \cdot id_V : V \longrightarrow V$$

ikke er inverterbar. Men

$$f^2 - 9 \cdot id_V = (f - 3 \cdot id_V) \circ (f + 3 \cdot id_V)$$

som operatorer på V (sjekk selv).

OPPGAVE S14.4

a) Skal vise: 9 er en egenverdi for f^2

$\iff$

3 eller -3 er en egenverdi for f

$\Rightarrow$: Det betyr at enten operatoren

$f - 3 \cdot id_V : V \to V$

eller operatoren

$f + 3 \cdot id_V : V \to V$

må være ikke inverterbar (her bruker vi S7.2). Det betyr i sin tur, hvis vi bruker Oppgave 3 igjen, at 3 eller -3 er en egenverdi for f.

OPPGAVE S14.4

a) Skal vise: 9 er en egenverdi for f^2

$\Longleftrightarrow$

3 eller -3 er en egenverdi for f

$\Leftarrow$: Anta at -3 eller 3 er en egenverdi for f. Da finnes en $\bar{0} \neq \bar{v} \in V$ slik at

$$f(\bar{v}) = -3\bar{v} \quad \text{eller} \quad f(\bar{v}) = 3\bar{v}.$$

Hvert av tilfellene medfører $f^2(\bar{v}) = 9\bar{v}$, altså at 9 er en egenverdi for f.

$$\Big(f(\bar{v}) = -3\bar{v} \Rightarrow f^2(\bar{v}) = f(f(\bar{v})) = f(-3\bar{v})$$

$$= -3f(\bar{v}) = (-3)\cdot(-3)\bar{v} = 9\bar{v},$$

og tilsvarende hvis $f(\bar{v}) = 3\bar{v}$. $\Big)$

OPPGAVE S14.4

b) Skal vise: Hvis $f^2 = id_V$ og -1 ikke er en egenverdi for f, så er $\boxed{f = id_V}$.

Anta at $f^2 \overset{(*)}{=} id_V$. Hvis -1 ikke er en egenverdi for f, så gir Oppgave 3 at operatoren

$$f - (-1) \cdot id_V = f + id_V : V \longrightarrow V$$

er inverterbar. Per definisjon betyr det at for hver $\bar{w} \in V$ finnes en $\bar{v} \in V$ slik at

$$\bar{w} = (f + id_V)(\bar{v}) = f(\bar{v}) + \bar{v} \quad (*).$$

Vi får da (ved å bruke f på $(*)$) at

$$f(\bar{w}) = \underbrace{f^2(\bar{v})}_{= \bar{v} \text{ ved } (*)} + f(\bar{v}) = \bar{v} + f(\bar{v}) \overset{(*)}{=} \bar{w}.$$

Altså er $\bar{w} = f(\bar{w}) \ \forall \ \bar{w} \in V$, i.e. $\boxed{f = id_V}$.

OPPGAVE S14.4

c) Anta at f^n er nulloperatoren, i.e. $f^n(\bar{w}) \overset{(*)}{=} \bar{0} \quad \forall \bar{w} \in V$.

Skal vise: Operatoren $id_V - f : V \to V$ er inverterbar.

Det er klart at operatoren $id_V - f$ er inverterbar hvis og bare hvis operatoren $f - id_V$ er inverterbar. Så ved Oppgave 3 holder det å vise at 1 ikke er en egenverdi for f.

Hvis 1 er en egenverdi for f, så finnes en $\bar{0} \neq \bar{v} \in V$ slik at $f(\bar{v}) = \bar{v}$. Men da blir jo $f^2 = f(f(\bar{v})) = f(\bar{v}) = \bar{v}$, og så videre til

$$f^n(\bar{v}) = \bar{v}.$$

Men dette strider mot antagelsen (*), så vi må konkludere med at 1 ikke er en egenverdi.

OPPGAVE S14.5

{EGENSKAPER fra FORELESNING V11

Skriv $\dim V = n$. Da har vi $\deg(\mathrm{charpol}_f) = n$, altså

$$\mathrm{charpol}_f(x) \overset{(+)}{=} \det(x \cdot \mathrm{id}_V - f)$$
$$= x^n - c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_2x^2 + c_1x + c_0 .$$

{$\mathrm{charpol}_f$ er "monisk" (EGENSKAPER fra FORELESNING V11)

Siden egenverdiene til f er røttene til $\mathrm{charpol}_f$, må

$$\mathrm{charpol}_f(x) \overset{(\times)}{=} (x-\lambda_1)^{m_1} \cdot (x-\lambda_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (x-\lambda_t)^{m_t} .$$

På den ene siden er nå konstantleddet c_0 gitt som

$$c_0 = \mathrm{charpol}_f(0) \overset{(\times)}{=} (-1)^n \cdot \lambda_1^{m_1} \cdot \lambda_2^{m_2} \cdot \dots \cdot \lambda_t^{m_t} . \quad (*)$$

Samtidig er

$$c_0 = \mathrm{charpol}_f(0) \overset{(+)}{=} \det(0 \cdot \mathrm{id}_V - f) = \det(-f) = (-1)^n \det(f). \quad \binom{*}{*}$$

Så $(*)$ og $\binom{*}{*}$ gir $\boxed{\det(f) = \lambda_1^{m_1} \cdot \lambda_2^{m_2} \cdot \dots \cdot \lambda_t^{m_t}}$.

OPPGAVE S14.6

a) Oppgave 5 avslører at determinanten til ei slik matrise er lik 0, så matrisa kan ikke være inverterbar.

a) Oppgave 5 avslører at determinanten til ei slik matrise er ulik 0 så matrisa må være inverterbar.

OPPGAVE S14.7

Vi ser altså på matrisa fra Oppgave 6a). Det vi vet om denne 3×3-matrisa A er at er at egenverdiene er $i, -i$ og -1. Da blir

$$\mathrm{charpol}_A(x) = (x-i)(x+i)(x+1)$$

Hvorfor ?

$$= x^3 + x^2 + x + 1.$$

Nå gir Cayley–Hamilton-teoremet (FORELESNING V12) at

nullmatrisa — identitetsmatrisa

$$O_{3\times 3} = \mathrm{charpol}_A(A) = A^3 + A^2 + A + I_{3\times 3}.$$

Dette kan vi manipulere til

$$I_{3\times 3} = -A^3 - A^2 - A = A(-A^2 - A - I_{3\times 3}),$$

som betyr at

$$\boxed{A^{-1} = -A^2 - A - I_{3\times 3}}.$$

OPPGAVE S14.8

V er et $\mathbb{C}$-vektorrom og $f: V \to V$ er en lineær operator uten egenverdier. $U \subset V$ er et underrom.

Skal vise: U er f-invariant

$\Rightarrow$

$U = \{\bar{0}\}$ eller U er uendeligdimensjonalt

Ekvivalent: $U \neq \{\bar{0}\}$ og U er ikke endeligdimensjonalt

$\Rightarrow$

U er ikke f-invariant

OPPGAVE S14.8

Så anta at $U \neq \{\bar{0}\}$ og at U er ikke endelig-dimensjonalt, altså at $U \neq \{\bar{0}\}$ og at U er endeligdimensjonalt.

Hvis f er U-invariant, så har vi operatoren

$$f|_U : U \longrightarrow U,$$

og ifølge PROPOSISJON I fra FORELESNING V14 har $f|_U$ en egenverdi $\lambda \in \mathbb{C}$. Men da er λ en egenverdi også for $f : V \longrightarrow V$ (enig?), og vi har en selvmotsigelse. Derfor kan ikke U være f-invariant, som var det vi skulle vise.

OPPGAVE S14.9

V er endeligdimensjonalt og $U \subset V$ er et underrom.

Skal vise: Hvis U er invariant under enhver lineær operator på V, så er $U = \{\bar{0}\}$ eller $U = V$.

Ekvivalent: Hvis $\{\bar{0}\} \neq U \neq V$, så finnes en lineær operator $f: V \to V$ slik at U ikke er f-invariant.

Strategi: Anta at $\{\bar{0}\} \neq U \neq V$ og bruk dette til å konstruere en operator f på V slik at U ikke er f-invariant.

OPPGAVE S14.9

Så anta at $\{\bar{0}\} \neq U \neq V$. Da finnes en
$\bar{u} \in U \setminus \{\bar{0}\}$ og en $\bar{w} \in V \setminus U$.

Vi vet (PROPOSISJON II fra FORELESNING V4) at det finnes en basis for V på formen $\{\bar{u}, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$.

Definér en linear operator $f : V \longrightarrow V$ ved

$$f(\bar{u}) = \bar{w} \quad \text{og} \quad f(\bar{v}_i) = \bar{0} \quad \forall\, i = 1, \dots, n$$

(huske TEOREM fra FORELESNING V5).

(Det vil si at for en vilkårlig

$$\bar{v} = a\bar{u} + b_1\bar{v}_1 + \dots + b_n\bar{v}_n \in V$$

har vi

$$f(\bar{v}) = f(a\bar{u} + b_1\bar{v}_1 + \dots + b_n\bar{v}_n) = a\bar{w}\ .)$$

Spesielt blir $f(\underbrace{\bar{u}}_{\in U}) = \bar{w} \notin U$, så U er ikke f-invariant.

OPPGAVE S14.10

La λ være en rot i p. Da finnes et polynom $q \in \mathbb{C}[x]$ slik at

i) $\deg q = \deg p - 1$ og

ii) $p = (x - \lambda) q$.

Nå gir ii) og antagelsen $p(f)(\bar{v}) = \bar{0}$ at

$$(f - \lambda \cdot id_V) \circ q(f)(\bar{v}) = \bar{0} \quad (*)$$

Men på grunn av i) og antagelsen om at p har minimal grad, må $q(f)(\bar{v}) \neq \bar{0}$. Altså impliserer $(*)$ at $\operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot id_V) \neq \{\bar{0}\}$, så $f - \lambda \cdot id_V$ er ikke injektiv. (TRIKS, V6). Dermed er λ en egenverdi for f (S14.3)