MA1202/6202

LØSNINGSFORSLAG TIL UTVALGTE OPPGAVER

SAMARBEIDSOPPGAVER S13

OPPGAVE S13.1

$\text{charpol}_A = x^2(x-1)(x-2)^3(x+1)$

a) Egenverdiene er røttene i det karakteristiske polynomet, altså $\underline{\underline{0, 1, 2 \text{ og } -1.}}$

b) Vi vet (Proposisjon fra Forelesning V13) at for hver egenverdi λ er

Egenrommet tilhørende λ

$$\underbrace{\dim E_\lambda}_{\text{"Geometrisk multiplisitet"}} \leq \underbrace{m_\lambda}_{\text{"Algebraisk multiplisitet"}}$$

Det gir følgende muligheter for dimensjonene til egenrommene:

$\dim E_0 \in \{1,2\}$ $\qquad \dim E_1 = 1$

$\dim E_2 \in \{1,2,3\}$ $\qquad \dim E_{-1} \in \{1,2\}.$

OPPGAVE S13.2

Skriv $n = \dim V$ og anta at $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ er distinkte egenverdier for f. For hver i, la $\bar{v}_i \in V$ være en egenvektor tilhørende λ_i.

Nå sier vår PROPOSISJON fra FORELESNING E11 at

$$\beta = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\} \subset V$$

er lineært uavhengig. Men da er jo β en (ordna) basis for V (hvorfor?) som består av egenvektorer for f. Så i følge vår PROPOSISJON (ALTERNATIV DEFINISJON) fra FORELESNING V13 er f diagonaliserbar.

OPPGAVE S13.3

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Vi ser med en gang at matrisa A har tre distinkte egenverdier (hva er disse egenverdiene og hvorfor kan vi lese dem rett av fra A?).

Siden A er en 3×3-matrise (og dermed representerer en operator på et tredimensjonalt vektorrom, følger det fra S13.2 at A er diagonaliserbar.

OPPGAVE S13.4

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Her er 1 den eneste egenverdien for B (hvorfor?). Så i følge resultatet kalt OPPSUMMERING fra FORELESNING V13 (som vi skal bevise i S13.9) er B diagonaliserbar hvis og bare hvis

$$\dim E_1 = 2.$$

Nå hjelper det kanskje å huske at for enhver lineær operator $f: V \to V$ med egenverdi λ, er $E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$ (se MERK fra FORELESNING V13). Spesielt blir her

$$\begin{aligned} \dim E_1 &= \text{dimensjonen til nullrommet til } (B - 1 \cdot I_{2\times 2}) \\ &= \text{dimensjonen til nullrommet til } \underbrace{(B - I_{2\times 2})}_{= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Så siden nullrommet til $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ har dimensjon lik 1, er B ikke diagonaliserbar.

OPPGAVE S13.5

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Her kan vi enten følge den "idiotsikre" metoden (altså $\text{charpol}_A \rightsquigarrow$ egenverdiene $\rightsquigarrow$ egenrommene) eller vi kan se umiddelbart at

- 0 er en egenverdi for A med $\dim E_0 = 2$ og
$$E_0 = \text{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

og at

- 3 er en egenverdi for A med $\dim E_3 = 1$ og
$$E_3 = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Dermed er B diagonaliserbar, og

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{for} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\left\{ \begin{array}{l} f: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (z_1, z_2) \longmapsto (z_2, 0) \end{array} \right.$

OPPGAVE S13.6

Mhp. den ordna basisen $\alpha = \{(1,0), (0,1)\}$ for $\mathbb{C}^2$ har vi $[t]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (Regn ut dette selv!)

Så $\text{charpol}_t = \det \begin{pmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = x^2$, som betyr at 0 er den eneste egenverdien for t og at $m_0 = 2$.

Den "algebraiske multiplisiteten" til egenverdien 0

Vi vet (OPPSUMMERING fra FORELESNING V13) at da er t diagonaliserbar hvis og bare hvis $\underbrace{\dim E_0}$ $= 2$.

Den "geometriske multiplisiteten" til egenverdien 0.

OPPGAVE S13.6

$$\begin{cases} f: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (z_1, z_2) \longmapsto (z_2, 0) \end{cases}$$

Nå hjelper det å huske at for enhver lineær operator $f: V \to V$ med egenverdi λ, er $E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$ (se MERK fra FORELESNING V13).

Spesielt blir her

$$\dim E_0 = \dim \mathrm{Ker}(t - 0 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}) = \dim \mathrm{Ker}\, t .$$

Men det er klart at

$$\dim \mathrm{Ker}\, t = 1$$ (ikke sant?).

Altså, $m_0 = 2 \neq 1 = \dim E_0$, så t er ikke diagonaliserbar.

OPPGAVE S13.7

Mhp. den ordna basisen $\beta = \{1, x, x^2\}$ for $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ har vi:

$$[D]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Regn ut dette selv!)

Så $\mathrm{charpol}_D = \det \begin{pmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -2 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = x^3$, som betyr at 0 er den eneste egenverdien for D og at $m_0 = 3$.

Den "algebraiske multiplisiteten" til egenverdien 0

Vi vet (OPPSUMMERING fra FORELESNING V13) at da er D diagonaliserbar hvis og bare hvis $\underbrace{\dim E_0}_{\text{Den "geometriske multiplisiteten" til egenverdien } 0.} = 3$.

OPPGAVE S13.7

Nå hjelper det igjen å huske at for enhver linear operator $f: V \to V$ med egenverdi λ, er $E_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot id_V)$ (se MERK fra FORELESNING V13). Spesielt blir her

$$\dim E_0 = \dim \operatorname{Ker}(D - 0 \cdot id_{\mathbb{R}[x]_{\leq 2}}) = \dim \operatorname{Ker} D.$$

Men det er klart at

$$\operatorname{Ker} D = \operatorname{span}(1) \quad (= \{\text{konstante polynomer}\} = \mathbb{R}[x]_{\leq 0}),$$

altså er

$$\dim \operatorname{Ker} D = 1.$$

Altså, $m_0 = 3 \neq 1 = \dim E_0$, så D er ikke diagonaliserbar.

OPPGAVE S13.8

$s : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$s(\bar{e}_1) = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_3$

$s(\bar{e}_2) = 3\bar{e}_2$

$s(\bar{e}_3) = 3\bar{e}_3$

Skriv $\beta = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ for vår standard ordna basis. Da er

$$[s]_\beta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(hvorfor?)},$$

så egenverdiene til s er 2 og 3 med $m_2 = 1$ og $m_3 = 2$ (hvorfor?).

Dermed, ved vår OPPSUMMERING fra FORELESNING V13, vet vi at s er diagonaliserbar hvis og bare hvis $\dim E_3 = 2$.

OPPGAVE S13.8

$s : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$s(\bar{e}_1) = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_3$

$s(\bar{e}_2) = 3\bar{e}_2$

$s(\bar{e}_3) = 3\bar{e}_3$

Som i S13.4, S13.5 og S13.6, er vi altså ute etter tallet

$$\dim E_3 = \dim \operatorname{Ker}(s - 3 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$$

$$= \text{dimensjonen til nullrommet til } \underbrace{[s - 3 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B}}}_{= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Det er klart (eller?) at $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ har 2-dimensjonalt nullrom, så s er diagonaliserbar.

OPPGAVE S13.8

$s: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$s(\bar{e}_1) = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_3$

$s(\bar{e}_2) = 3\bar{e}_2$

$s(\bar{e}_3) = 3\bar{e}_3$

For å faktisk diagonalisere s, trenger vi basiser for egenrommene E_2 og E_3.

Vi forutsettes at studentene behersker denne typen utregninger, og oppgir uten videre at

- en basis for E_2 er $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ og
- en basis for E_3 er $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

OPPGAVE S13.8

$s: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$s(\bar{e}_1) = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_3$

$s(\bar{e}_2) = 3\bar{e}_2$

$s(\bar{e}_3) = 3\bar{e}_3$

Da vet vi (husk at vi har PROPOSISJON (ALTERNATIV DEFINISJON) fra FORELESNING V13), at

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

er en ordna basis for $\mathbb{R}^3$ slik at $[s]_\alpha$ er diagonal (og vi vet at

$$[s]_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

).

OPPGAVE S13.9

a) Skriv $\beta = \beta_1 \cup \ldots \cup \beta_n$.

Skal vise: β er lineært uavhengig.

Så anta at

$$\bar{0} = \underbrace{a_1\bar{v}_1 + \ldots + a_m\bar{v}_m}_{(*)} \quad \text{med } \bar{v}_i \in \beta$$

Vil vise: $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$.

For hver $j = 1, \ldots, n$ la $\bar{u}_j$ være summen av alle de leddene $a_t\bar{v}_t$ fra $(*)$ som tilhører E_j. Da har vi $\bar{u}_j \in E_j$ (siden E_j er et underrom). Nå har vi altså

$$\bar{0} = a_1\bar{v}_1 + \ldots + a_m\bar{v}_m = \bar{u}_1 + \ldots + \bar{u}_n \quad (**).$$

OPPGAVE S13.9

a) I følge Proposisjon fra Forelesning E11 er mengden $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\}$ lineært uavhengig, så (**) impliserer $\bar{u}_j = \bar{0}$ $\forall$ $j = 1, \dots, m$.

Men $\bar{u}_j$ var jo summen av de $a_t \bar{v}_t$ fra (*) som er slik at $v_t \in \beta_j$. Dermed, siden hver β_j er lineært uavhengig per antagelse, må $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

OPPGAVE S13.9

b) Skal vise: f diagonaliserbar

$$\Longleftrightarrow$$

$$\dim V = \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_n}$$

$\Leftarrow$: Anta at $\dim V \overset{(*)}{=} \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_n}$. For hver $i = 1, \dots, n$, la α_i være en basis for E_{λ_i}. Da er

$$\alpha = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_n \subset V$$

lineært uavhengig i følge a). Dessuten medfører antagelsen (*) at α inneholder $\dim V$ vektorer. Så PROPOSISJON II i fra FORELESNING V4 avslører at α er en basis for V. Siden α består av egenvektorer for f, er f diagonaliserbar (PROPOSISJON (ALTERNATIV DEFINISJON), V13).

OPPGAVE S13.9

b) Skal vise: f diagonaliserbar

$$\iff$$

$$\dim V = \dim E_{\lambda_1} + \ldots + \dim E_{\lambda_n}$$

$\Rightarrow$: Anta at f er diagonaliserbar. I følge TEOREM II fra FORELESNING V13 er da

$$\dim E_{\lambda_i} = m(\lambda_i) \quad \forall \quad i = 1, \ldots, n.$$

Det følger umiddelbart at

$$\dim V = \sum_{i=1}^{n} m(\lambda_i) = \dim E_{\lambda_1} + \ldots + \dim E_{\lambda_n}.$$