MA1202/6202

LØSNINGSFORSLAG TIL UTVALGTE OPPGAVER

SAMARBEIDSOPPGAVER S12

OPPGAVE S12.1

a) $\text{charpol}_A(x) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 4 \\ 2 & 3-x \end{pmatrix} = (1-x)(3-x) - 4\cdot 2 = \underline{\underline{x^2 - 4x - 5}}$.

Det er rett fram å regne ut at

$$\text{charpol}_A(A) = A^2 - 4A - 5I_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Vi har $s(x) = x^5 - 4x^4 - 7x^3 + 11x^2 - x - 10$. Ved polynomdivisjon finner vi at

$$s(x) = \text{charpol}_A(x)\cdot(x^3 - 2x + 3) + x + 5$$

Derfor blir

$$s(A) = \underbrace{\text{charpol}_A(A)}_{\substack{=\text{null-matrisa} \\ \text{i følge a)}}}\cdot(A^3 - 2A + 3I_{2\times 2}) + A + 5I_{2\times 2}$$

$$= A + 5I_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}}}.$$

OPPGAVE S12.2

Skriv $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ -6 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Da blir

$$\text{charpol}_A = \det(A - x \cdot I_{3\times3}) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 3.$$

Cayley–Hamilton-teoremet sier da at

$$0 = -A^3 + 5 \cdot A^2 - 7 \cdot A + 3 \cdot I_{3\times3}.$$

Det følger at

$$3 \cdot I_{3\times3} = A^3 - 5 \cdot A^2 + 7 \cdot A = A(A^2 - 5A + 7 \cdot I_{3\times3})$$

Altså er

$$I_{3\times3} = A \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (A^2 - 5A + 7 \cdot I_{3\times3})\right),$$

så inversen til matrisa A er

$$\frac{1}{3} \cdot (A^2 - 5A + 7 \cdot I_{3\times3}) = \underset{\text{Enkel regning}}{\ldots} = \underline{\underline{\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -2 \\ -6 & -2 & 5 \end{pmatrix}}}.$$

OPPGAVE S12.3

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Skriv $s(x) = -x^3 + 4x^2 + 3x - 4$. Oppgaven ber oss altså om å finne matrisa $s(B)$.

Det karakteristiske polynomet til B er

$$p(x) = (1-x)(1-x)(2-x) = -x^3 + 4x^2 - 5x + 2.$$

Merk at

$$s(x) = p(x) + 8x - 6.$$

$=0$ ved CAYLEY–HAMILTON

Dermed blir

$$s(B) = \overbrace{p(B)} + 8B - 6I$$

$$= 8B - 6I = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 16 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 16 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}}}.$$

OPPGAVE S12.4

a) Først en generell observasjon: Hvis

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & 0 & \\ & & \lambda_3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

er ei diagonal matrise og f er et polynom, så er $f(D)$ også ei diagonal matrise, nemlig

$$f(D) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & & \\ & f(\lambda_2) & & 0 & \\ & & f(\lambda_3) & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

OPPGAVE S12.4

a) Nå er det lett å vise CAYLEY–HAMILTON for D:

Det karakteristiske polynomet til D er

$$p(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)\dots(x-\lambda_n).$$

Det betyr at

$$p(D) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & & & & 0 \\ & p(\lambda_2) & & & \\ & & p(\lambda_3) & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & p(\lambda_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

OPPGAVE S12.4

b) La $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Det karakteristiske polynomet til A er

$$p(x) = \det\begin{pmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{pmatrix} = (x-a)(x-d) - bc$$
$$= x^2 - (a+d)x + ad - bc.$$

Da blir

$$p(A) = A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+bc-a(a+d)+ad-bc & b(a+d)-b(a+d)+0 \\ c(a+d)-c(a+d)+0 & d^2+bc-d(a+d)+ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

OPPGAVE S12.5

a) $\bar{v} \in U \Rightarrow \bar{v} = (x,0)$ for en $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(\bar{v}) = (0,0) \in U$,

som viser at U er f-invariant

b) $f|_U : U \longrightarrow U$ er lik nulloperatoren på U!

OPPGAVE S12.6

a) Vi bruker PROPOSISJON I fra FORELESNING V2:

i) W inneholder nullvektoren i C^∞ (det vil si nullfunksjonen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$), nemlig ϕ_0. ✓

$(\phi_0(x) = 0 \cdot e^x = 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R})$

ii) Hvis $\phi_r, \phi_s \in W$, så er $\phi_r + \phi_s = \phi_{r+s} \in W$ ✓

$((\phi_r + \phi_s)(x) = \phi_r(x) + \phi_s(x)$

$= re^x + se^x = (r+s)e^x = \phi_{r+s}(x) \quad \forall\ x \in \mathbb{R}.)$

iii) Hvis $\lambda \in \mathbb{R}$, så er $\lambda \cdot \phi_r = \phi_{\lambda r} \in W$. ✓

$((\lambda \cdot \phi_r)(x) = \lambda \cdot \phi_r(x) = \lambda \cdot r e^x$

$= \lambda r \cdot e^x = \phi_{\lambda r}(x) \quad \forall\ x \in \mathbb{R}.)$.

OPPGAVE S12.6

b) Det er klart at $W = \mathrm{span}(\phi_1)$, så $\{\phi_1\}$ er en basis for W (hvorfor er $\{\phi_1\}$ lineært uavhengig?), så $\underline{\underline{\dim W = 1}}$

c) For hver $\phi_r \in W$ er $D(\phi_r) = \phi_r \in W$, så W er D-invariant.

d) $D|_W$ er lik identitetsoperatoren på W.

OPPGAVE S12.8

Skal vise: $\quad f$ har en egenverdi

$\Longleftrightarrow$

V har et 1-dimensjonalt underrom som er f-invariant.

$\Rightarrow$: Hvis $\lambda \in F$ er en egenverdi, så finnes $\bar{0} \neq \bar{v} \in V$ slik at $f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$. Da blir span$(\bar{v}) \subset V$ et underrom som er 1-dimensjonalt og f-invariant

$$\left(\text{span}(\bar{v}) = \text{span}(\bar{v}, \underset{\lambda \bar{v}}{\underset{\|}{f(\bar{v})}}, \underset{\lambda^2 \bar{v}}{\underset{\|}{f^2(\bar{v})}}, \ldots) = U_{\bar{v}} \right).$$

OPPGAVE S12.8

Skal vise: f har en egenverdi

$\Leftrightarrow$

V har et 1-dimensjonalt underrom som er f-invariant.

$\Leftarrow$: Hvis et underrom $U \subset V$ er 1-dimensjonalt, så finnes $\bar{0} \neq \bar{v} \in V$ slik at $U = \mathrm{span}(\bar{v})$. Hvis U i tillegg er f-invariant, så er $f(\bar{v}) \in U$, som vil si at det finnes $\lambda \in \mathbb{F}$ slik at $f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$.

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gitt ved
$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n)$

OPPGAVE S12.9

I S11.3 fant vi at egenverdiene til f er nøyaktig

$$1, 2, 3, \dots, n$$

og at egenrommene er

$$E_i = \text{span}(\bar{e}_i) \subset \mathbb{R}^n \quad \forall \quad i = 1, \dots, n.$$

Standardbasisvektor

Det følger fra S12.8 (og beviset vi førte der) at de 1-dimensjonale underrommene av $\mathbb{R}^n$ som er f-invariante, er nøyaktig disse n underrommene, altså $\text{span}(\bar{e}_i)$ for $i = 1, \dots, n$.

OPPGAVE S12.10

a) Anta at $U \subset \ker f$.

Skal vise: U er f-invariant.

Så la $\bar{u} \in U$. Da må

$f(\bar{u}) = \bar{0} \in U$, så U er f-invariant

Fordi $U \subset \ker f$ Fordi U er et underrom

OPPGAVE S12.11

a) Anta at $f \circ g \overset{(*)}{=} g \circ f$.

Skal vise: $\operatorname{Ker} f$ er invariant under g.

Så la $\bar{v} \in \operatorname{Ker} f$. Da må $g(\bar{v}) \in \operatorname{Ker} f$

(siden

$$f(g(\bar{v})) = f \circ g(\bar{v}) \overset{(*)}{=} g \circ f(\bar{v}) = g(\underbrace{f(\bar{v})}_{=\bar{0}}) = g(\bar{0}) = \bar{0}).$$

Altså er $\operatorname{Ker} f$ invariant under g.

OPPGAVE S12.12

Hintet minner oss på at hvis $|x|<1$, så er

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}.$$

I vårt tilfelle er jo $f^n = 0$, så vi prøver oss med

$$(id_V - f)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} f^i = id_V + f + f^2 + \dots + f^{n-1}.$$

Dette blir en invers til $1-f$:

$$\begin{aligned}
&(id_V - f)\circ(id_V + f + f^2 + \dots + f^{n-1}) \\
&= id_V + \cancel{f} + \cancel{f^2} + \dots + \cancel{f^{n-1}} - (\cancel{f} + \cancel{f^2} + \dots + \cancel{f^{n-1}} + \underbrace{f^n}_{=0}) \\
&= id_V.
\end{aligned}$$