MA1202/6202

LØSNINGSFORSLAG TIL UTVALGTE OPPGAVER

SAMARBEIDSOPPGAVER S11

$$\begin{cases} f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) \longmapsto (2x_2, 0, 5x_3) \end{cases}$$

OPPGAVE S11.1

a) $\lambda \in \mathbb{R}$ er en egenverdi for f hvis og bare hvis det finnes en $\bar{0} \neq \bar{v} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ slik at

$$(2x_2, 0, 5x_3) \overset{\text{Definisjonen av } f}{=} f(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \overset{\text{Skalarmultiplikasjonens natur i } \mathbb{R}^3}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3).$$

Vi ser(*) at $\lambda = 0$ er én mulighet (da må $x_2 = 0 = x_3$, men x_1 kan velges fritt).

Vi ser(*) også at hvis $\lambda \neq 0$, så må $x_2 = 0$ (fordi: $\lambda x_2 = 0$) og dermed også $x_1 = 0$ (fordi: $\lambda x_1 = 2x_2$). Men vi kan ha $x_3 \neq 0$ dersom $\lambda = 5$.

Altså er f sine egenverdier $\underline{\underline{0 \text{ og } 5}}$.

OPPGAVE S11.1

$$\begin{cases} f: & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & (x_1, x_2, x_3) \longmapsto (2x_2, 0, 5x_3) \end{cases}$$

a) (*): Den som ikke er så komfortabel med "å se" på denne måten, kan bruke en enda mer oppskriftsmessig metode:

- Observér at $f = L_A$ for $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
(altså at $f(\bar{v}) = A \cdot \bar{v} \quad \forall \ \bar{v} \in \mathbb{R}^3$).

- Regn ut $\text{charpol}_A = \det \begin{pmatrix} \lambda & -2 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{pmatrix} = \lambda^2 (\lambda - 5)$.

- Konkludér med at f sine egenverdier er 0 og 5.

OPPGAVE S11.1

$$\begin{cases} f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) \longmapsto (2x_2, 0, 5x_3) \end{cases}$$

b) Vi fant jo egentlig egenvektorene over, da vi lette etter egenverdiene:

Hver ikke-null vektor på formen $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ er en egenvektor tilhørende egenverdien $\lambda = 0$.

Hver ikke-null vektor på formen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ er en egenvektor tilhørende egenverdien $\lambda = 5$.

NB! Den "alternative" løsningen av a) (altså den som baserte seg på matrisa A), sier ikke like umiddelbart noe om de tilhørende egenvektorene.

$$\begin{cases} f: & \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ & (z_1, z_2) \longmapsto (-z_2, z_1) \end{cases}$$

OPPGAVE S11.2

a) Lista med EGENSKAPER i FORELESNING V11 sier at f kan ha høyst $\dim \mathbb{C}^2 = 2$ egenverdier. Så $\pm i$ er de eneste egenverdiene.

b) Her nøyer vi oss med å oppgi svaret:

- Hver egenvektor tilhørende egenverdien i er på formen
  $(z, -iz) \in \mathbb{C}^2$ med $z \in \mathbb{C}$.

- Hver egenvektor tilhørende egenverdien $-i$ er på formen
  $(z, iz) \in \mathbb{C}^2$ med $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} f: & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots, nx_n) \end{cases}$$

OPPGAVE S11.3

a) $\lambda \in \mathbb{R}$ er en egenverdi for f hvis og bare hvis det finnes en $\bar{0} \neq \bar{v} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ slik at

$$(x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots, nx_n) = f(\bar{v}) = \lambda \bar{v} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots, \lambda x_n)$$

Vi ser(*) at $\lambda = 1$ er én mulighet (da må $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$, men x_1 kan velges fritt).

Vi ser(*) også at $\lambda = 2$ er en mulighet (da kan x_2 velges fritt, men vi må ha $x_1 = 0 = x_3 = x_4 = \ldots = x_n$).

$$\begin{cases} f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots, nx_n) \end{cases}$$

OPPGAVE S11.3

a) Faktisk ser (*) vi at hvert heltall $\lambda \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ er en egenverdi for f (fordi:

$$f(0, \dots, 0, \underset{\uparrow \text{ Posisjon } k}{x}, 0, \dots, 0) = (0, \dots, 0, kx, 0, \dots, 0) = k(0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0)$$

for hver $x \in \mathbb{R}$).

I følge lista med EGENSKAPER i FORELESNING V11 har f høyst $\dim \mathbb{R}^n = n$ egenverdier. Altså er f sine egenverdier nøyaktig $\underline{\underline{1, 2, 3, \dots, n}}$.

$$\begin{cases} f: & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots, nx_n) \end{cases}$$

OPPGAVE S11.3

a) (*): Den som ikke er så komfortabel med "å se" på denne måten, kan bruke en enda mer oppskriftsmessig metode:

- Observér at $f = L_B$ for $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$

  (altså at $f(\bar{v}) = B \cdot \bar{v} \quad \forall \ \bar{v} \in \mathbb{R}^n$).

- Regn ut

$$\mathrm{charpol}_B = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)\dots(n-\lambda).$$

- Konkludér med at f sine egenverdier er $1, 2, \dots, n$.

$$\begin{cases} f: & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots, nx_n) \end{cases}$$

OPPGAVE S11.3

b) Vi fant jo egentlig egenvektorene over, da vi lette etter egenverdiene:

Hver vektor på formen $(0, \dots, 0, \underset{\text{Posisjon } k}{x}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ med $x \neq 0$ er en egenvektor tilhørende egenverdien k.

NB! Den "alternative" løsningen av a) (altså den som baserte seg på matrisa B), sier ikke like umiddelbart noe om de tilhørende egenvektorene.

OPPGAVE S11.4

a) Skal vise: 0 er en egenverdi for f $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f \neq \{\bar{0}\}$.

$\Rightarrow$: Anta at 0 er en egenverdi. Da finnes en tilhørende egenvektor, altså en $\bar{0} \neq \bar{v} \in V$ slik at $f(\bar{v}) = 0 \cdot \bar{v} = \bar{0}$. Det vil si at $\bar{v} \in \operatorname{Ker} f$, så $\operatorname{Ker} f \neq \{\bar{0}\}$.

S1.2 b)

$\Leftarrow$: Anta at $\operatorname{Ker} f \neq \{\bar{0}\}$. Da finnes en $\bar{0} \neq \bar{v} \in \operatorname{Ker} f$, som betyr at

S1.2 b)

$$f(\bar{v}) = \bar{0} = 0 \cdot \bar{v},$$

altså at 0 er en egenverdi for f.

OPPGAVE S11.4

b) Siden f nå er inverterbar per antagelse, må enhver egenverdi for f være ikke-null (a)).

Det vi skal vise følger nå fra denne kjeden av ekvivalente utsagn:

$$f(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \iff \underbrace{f^{-1}(f(\bar{v}))}_{f^{-1}(\lambda \bar{v}) = \lambda f^{-1}(\bar{v})} = \bar{v} \iff f^{-1}(\bar{v}) = \frac{1}{\lambda} \bar{v}$$

c) Dette er klart fra det vi gjorde i b).

OPPGAVE S11.5

La $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ være egenverdier for f med tilhørende egenvektorer $\bar{v}_\lambda$, $\bar{v}_\mu \in V$, henholdsvis.

Skal vise: $\lambda \neq \mu \Rightarrow \bar{v}_\lambda \neq \bar{v}_\mu$.

Ekvivalent: $\bar{v}_\lambda = \bar{v}_\mu \Rightarrow \lambda = \mu$.

Så anta at $\bar{v}_\lambda = \bar{v}_\mu$. Da er $\bar{v}_\lambda \neq \bar{0}$ (definisjon av egenvektor), så delmengden $\{\bar{v}_\lambda\} \subset V$ er lineært uavhengig (hvorfor?). Men antagelsen medfører

$$f(\bar{v}_\lambda) = \lambda \bar{v}_\lambda = \mu \bar{v}_\lambda, \quad \text{så} \quad (\lambda - \mu)\bar{v}_\lambda \overset{(*)}{=} \bar{0}.$$

Siden $\{\bar{v}_\lambda\}$ er lineært uavhengig, impliserer $(*)$ at $\lambda - \mu = 0$, altså $\lambda = \mu$.

$$\begin{cases} s: & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ & (r_1, r_2, r_3, \dots) \longmapsto (r_2, r_3, r_4, \dots) \end{cases}$$

OPPGAVE S11.6

a) La $\lambda \in \mathbb{R}$. Vi har den ikke-null vektoren

$$\bar{v}_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},$$

og det er klart at

$$(\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots) \overset{\text{Definisjonen av } s}{=} s(\bar{v}_\lambda) = \lambda \cdot \bar{v}_\lambda = \lambda \cdot (1, \lambda, \lambda^2, \dots) \overset{\text{Skalarmultiplikasjonens natur i } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}{=} (\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots),$$

altså at λ er en egenverdi for s.

$$\begin{cases} t: & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ & (r_1, r_2, r_3, \ldots) \longmapsto (0, r_1, r_2, r_3, \ldots) \end{cases}$$

OPPGAVE S11.6

b) $\lambda \in \mathbb{R}$ er en egenverdi for t hvis og bare hvis det finnes en $\bar{0} \neq \bar{v} = (r_1, r_2, r_3, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ slik at

$$(0, r_1, r_2, r_3, \ldots) = t(\bar{v}) = \lambda \cdot \bar{v} = (\lambda r_1, \lambda r_2, \lambda r_3, \ldots)$$

Dette betyr:

- $\lambda = 0$ er ikke en egenverdi for t ($\lambda = 0 \Rightarrow 0 = r_1 = r_2 = r_3 = \ldots$, men $\bar{v} \neq \bar{0}$).
- Heller ingen $\lambda \neq 0$ kan være en egenverdi for t ($\lambda \neq 0 \Rightarrow r_1 = 0 \Rightarrow r_2 = 0 \Rightarrow r_3 = 0 \Rightarrow \ldots$, så hver $r_i = 0$ også i dette tilfellet).

Altså, ingen $\lambda \in \mathbb{R}$ er egenverdi for t.

OPPGAVE S11.8

Hvis påstanden ikke holder, så er operatoren

$$f - \alpha \cdot \mathrm{id}_V : V \longrightarrow V$$

ikke inverterbar for hver α slik at

$$|\alpha - \lambda| < \frac{1}{1000} \quad (*) .$$

Det betyr at α er en egenverdi for f. Men det finnes jo uendelig mange α som oppfyller $(*)$, og f kan ha høyst $\dim V < \infty$ distinkte egenverdier. Dette er absurd, så påstanden i oppgaven må holde.

OPPGAVE S11.9

Skriv $V = \text{span}(e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ og la
$D : V \longrightarrow V$ være linearoperatoren gitt ved derivasjon,
altså $D(\phi) = \phi' \ \forall \ \phi \in V$. Da er

$$D(e^{\lambda_i x}) = \lambda_i e^{\lambda_i x},$$

så hver $e^{\lambda_i x}$ er en egenvektor for D tilhørende
egenverdien λ_i. Da gir PROPOSISJON fra FORELESNING E11
at $\{e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}\}$ er lineært uavhengig.

OPPGAVE S11.10

Inspirert av et EKSEMPEL (rotasjon) fra FORELESNING V11 prøver vi operatoren

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto (-x_4, x_1, x_2, x_3) . \end{cases}$$

Leseren kan selv sjekke at f ikke har noen egenverdier i $\mathbb{R}$.