MA1202/6202

LØSNINGSFORSLAG TIL UTVALGTE OPPGAVER

SAMARBEIDSOPPGAVER S10

OPPGAVE S10.1

$$y'''' - y''' - 3y'' + y' + 2y = 0 \quad (*)$$

dann polynom

$$\rightsquigarrow \quad x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 = (x-2)(x-1)(x-(-1))^2$$

Så $\{ e^{2t}, e^{t}, e^{-t}, te^{-t} \}$ er en basis for løsningsrommet til $(*)$. Altså, den generelle løsninga er

$$\underline{\underline{y(t) = ae^{2t} + be^{t} + ce^{-t} + dte^{-t}}}.$$

OPPGAVE S10.2

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad (**)$$

dann polynom $\rightsquigarrow$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$$

Så $\{e^{2t}, e^t\}$ er en basis for løsningsrommet til $(**)$. Altså, den generelle løsninga er

$$\underline{\underline{y(t) = a e^{2t} + b e^t}}$$

OPPGAVE S10.2

Betingelsene $y(0) \overset{(+)}{=} 0$ og $y'(0) \overset{(++)}{=} 1$ gir

$$
\begin{aligned}
0 &= y(0) = a + b \\
1 &= y'(0) = 2a + b
\end{aligned}
$$

Dette systemet har løsning $a = 1$, $b = -1$.
Altså, den løsningen av (**) som tilfredsstiller (+) og (++), er

$$
\underline{\underline{y(t) = e^{2t} - e^{t}.}}
$$

OPPGAVE S10.3

a) $y'' + y = 0$ $\underset{\text{polynom}}{\overset{\text{dann}}{\rightsquigarrow}}$ $x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$

Generell løsning er dermed

$$\underline{\underline{y(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}.}}$$

OPPGAVE S10.3

b) $y'' + 2y' + 5y = 0$

dann polynom $\rightsquigarrow$ $x^2 + 2x + 5 = (x - (-1+2i))(x - (-1-2i))$

Generell løsning er dermed

$$\underline{\underline{y(t) = c_1 e^{(-1+2i)t} + c_2 e^{(-1-2i)t}.}}$$

OPPGAVE 510.3

c) $y''' + y = 0$

dann polynom $\rightsquigarrow$ $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$

$$= (x+1)\left(x - \left(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

Generell løsning er dermed

$$\underline{\underline{y(t) = c e^{-t} + c_1 e^{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} + c_2 e^{\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}.}}$$

OPPGAVE S10.4

a) Anta at $p(z) = 0$. Da blir

$$p(\overline{z}) = \overline{p(z)} = \overline{0} = 0$$

Overbevis deg selv om at dette er sant (for vilkårlig $z \in \mathbb{C}$).

b) Oppgaven er essensielt løst i hintet!

c) Dette følger rett fra resultatet i b).

OPPGAVE S10.4

d) • $y'' + y = 0$ har generell løsning

$$y(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}$$

$$= \underline{\underline{c_1 \cos t + c_2 \sin t}}.$$

• $y'' + 2y' + 5y = 0$ har generell løsning

$$y(t) = c_1 e^{(-1+2i)t} + c_2 e^{(-1-2i)t}$$

$$= \underline{\underline{e^{-t}\left(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)\right)}}.$$

OPPGAVE S10.4

d). $y''' + y = 0$ har generell løsning

$$y(t) = c e^{-t} + c_1 e^{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} + c_2 e^{\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}$$

$$= c e^{-t} + e^{\frac{t}{2}}\left(c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}\, t}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}\, t}{2}\right)\right).$$