MA1202/6202

LØSNINGSFORSLAG TIL UTVALGTE OPPGAVER

SAMARBEIDSOPPGAVER S9

OPPGAVE 5a.1

$(\beta = \{(2,2),(4,-1)\}, \beta' = \{(1,3),(-1,-1)\})$

a) Per Proposisjon I fra Forelesning Va er

$$M_{\beta}^{\beta'} = [id_{\mathbb{R}^2}]_{\beta}^{\beta'} = \left([(2,2)]_{\beta'} \;\middle|\; [(4,-1)]_{\beta'} \right)$$

For å finne $[(2,2)]_{\beta'}$ må vi skrive $(2,2)$ som en linearkombinasjon av vektorene i β'. Altså

$$(2,2) = a(1,3) + b(-1,-1),$$

som gir systemet

$$\left.\begin{aligned} a - b &= 2 \\ 3a - b &= 2 \end{aligned}\right\} \text{Løsning: } a = 0,\ b = -2$$

Dermed blir

$$[(2,2)]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

OPPGAVE 59.1 $\quad (\beta = \{(2,2),(4,-1)\}, \ \beta' = \{(1,3),(-1,-1)\}$

a) For å finne $[(4,-1)]_{\beta'}$ må vi skrive $(4,-1)$ som en lineærkombinasjon av vektorene i β'. Altså

$$(4,-1) = c(1,3) + d(-1,-1),$$

som gir systemet

$$\left.\begin{aligned} c - d &= 4 \\ 3c - d &= -1 \end{aligned}\right\} \text{Løsning: } c = \frac{-5}{2}, \ d = \frac{-13}{2}$$

Dermed blir

$$[(4,-1)]_{\beta'} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} \\ \frac{-13}{2} \end{pmatrix}$$

Da får vi

$$M_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-5}{2} \\ -2 & \frac{-13}{2} \end{pmatrix}.$$

OPPGAVE 5a.1 $(\beta = \{(2,2),(4,-1)\},\ \beta' = \{(1,3),(-1,-1)\})$

b) Per vår OBSERVASJON fra FORELESNING V9 (som vi også skal bevise i 5a.4) er

$$M_{\beta'}^{\beta} = \left(M_{\beta}^{\beta'}\right)^{-1} \overset{a)}{=} \begin{pmatrix} 0 & \frac{-5}{2} \\ -2 & \frac{-13}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{13}{10} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}}}$$

c) For å finne $[\bar{v}]_\beta$ må vi skrive $\bar{v} = (3,-5)$ som en lineærkombinasjon av vektorene i β. Altså

$$(3,-5) = a(2,2) + b(4,-1),$$

som gir systemet

$$\left.\begin{aligned} 2a + 4b &= 3 \\ 2a - b &= -5 \end{aligned}\right\}$$ Løsning: $a = \frac{-17}{10}$, $b = \frac{8}{5}$

Dermed blir $[\bar{v}]_\beta = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{-17}{10} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}}}$

OPPGAVE 59.1 $(\beta = \{(2,2),(4,-1)\}, \beta' = \{(1,3),(-1,-1)\})$

d) For å finne $[\bar{v}]_{\beta'}$ bruker vi selvsagt ei basisbyttematrise:

$$[\bar{v}]_{\beta'} = M_{\beta}^{\beta'} \cdot [\bar{v}]_{\beta}$$

$$\overset{a) \& c)}{=} \begin{pmatrix} 0 & \frac{-5}{2} \\ -2 & \frac{-13}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-17}{10} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix}}}$$

(En annen måte er å finne $[\bar{v}]_{\beta'}$ "direkte" som i oppgave c).)

OPPGAVE 5a.2

La oss skrive

- $f_1 = \cos x$ og $f_2 = \sin x$, så $\beta = \{f_1, f_2\}$ og
- $g_1 = 2\sin x + \cos x$ og $g_2 = 3\cos x$, så $\beta' = \{g_1, g_2\}$.

a) Det er for det første klart at $\beta' \subset V = \text{span}(\beta)$.

Videre er det klart at β' er lineært uavhengig (g_1 er ikke et skalarmultiplum av g_2; bruk S3.8).
Siden β' har 2 elementer og $\dim V = 2$ (fordi: β er en basis), følger det fra PROPOSISJON II i) fra FORELESNING V4 at β' er en basis for V.

OPPGAVE 5a.2

$f_1 = \cos x$ og $f_2 = \sin x$, så $\beta = \{f_1, f_2\}$

$g_1 = 2\sin x + \cos x$ og $g_2 = 3\cos x$, så $\beta' = \{g_1, g_2\}$

b) Per Proposisjon I fra Forelesning Va er

$$M_{\beta'}^{\beta} = [\mathrm{id}_V]_{\beta'}^{\beta} = \left([g_1]_\beta \mid [g_2]_\beta \right)$$

For å finne $[g_1]_\beta$ må vi skrive g_1 som en lineærkombinasjon av vektorene i β. Altså

$$g_1 = a f_1 + b f_2,$$

altså

$$2\sin x + \cos x = a \cos x + b \sin x,$$

som gir $a = 1$, $b = 2$. Dermed er

$$[g_1]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

OPPGAVE 5a.2

$f_1 = \cos x$ og $f_2 = \sin x$, så $\beta = \{f_1, f_2\}$
$g_1 = 2\sin x + \cos x$ og $g_2 = 3\cos x$, så $\beta' = \{g_1, g_2\}$

b) For å finne $[g_2]_\beta$ må vi skrive g_2 som en lineærkombinasjon av vektorene i β. Altså

$$g_2 = a f_1 + b f_2,$$

altså

$$3\cos x = a \cos x + b \sin x,$$

som gir $a = 3$, $b = 0$. Dermed er

$$[g]_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi vet da at basisbyttematrisa fra β' til β er

$$\underline{\underline{M_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}}.$$

OPPGAVE 5a.2

$f_1 = \cos x$ og $f_2 = \sin x$, så $\beta = \{f_1, f_2\}$

$g_1 = 2\sin x + \cos x$ og $g_2 = 3\cos x$, så $\beta' = \{g_1, g_2\}$

c) Per vår OBSERVASJON fra FORELESNING V9 (som vi også skal bevise i 5a.4) er

$$M_{\beta}^{\beta'} = \left(M_{\beta'}^{\beta}\right)^{-1} \overset{b)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}}}$$

d) Siden $h = 2\sin x - 5\cos x = -5f_1 + 2f_2$ ser vi med en gang at

$$\underline{\underline{[h]_{\beta} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}}}.$$

OPPGAVE 5a.2

$f_1 = \cos x$ og $f_2 = \sin x$, så $\beta = \{f_1, f_2\}$
$g_1 = 2\sin x + \cos x$ og $g_2 = 3\cos x$, så $\beta' = \{g_1, g_2\}$
$h = 2\sin x - 5\cos x$

e) For å finne $[h]_{\beta'}$ bruker vi selvsagt ei basisbyttematrise:

$$[h]_{\beta'} = M_{\beta}^{\beta'} \cdot [h]_{\beta}$$

$$\overset{c)\&d)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/3 & -1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}}$$

(En annen måte er å finne $[h]_{\beta'}$ "direkte" som i oppgave d).)

OPPGAVE 5a.3

a) Husk (eller sjekk) at vi alltid har

$$\det(XY) \overset{(*)}{=} \det(X)\cdot\det(Y)$$

Produkt av matriser

Produkt av tall/skalarer

Anta nå at A og B er similære, altså at vi kan skrive $B = Q^{-1}AQ$ for ei invertierbar matrise Q. Da blir, ved $(*)$,

$$\det(B) = \det(Q^{-1}AQ) = \det(Q^{-1})\det(A)\det(Q)$$
$$= \det(Q)^{-1}\det(A)\det(Q)$$
$$= \det(A)\underbrace{\det(Q)^{-1}\det(Q)}_{=1}$$
$$= \det(A).$$

OPPGAVE 59.3

b) Definisjon:

La $f: V \to V$ være en lineær operator på et endeligdimensjonalt vektorrom V.
Determinanten til f er tallet
$$\det f = \det [f]_\beta$$
hvor $\beta \subset V$ er en (hvilken som helst) ordna basis.

Merk: "$\det f$" er veldefinert takket være a).
(Hvis $\beta, \beta' \subset V$ er ordna basiser, så er matrisene $[f]_\beta$ og $[f]_{\beta'}$ similære i følge KOROLLAR fra FORELESNING V9).

OPPGAVE 59.5

koordinatvektorer

Matriserepresentasjon

Skal vise: $[f(\bar{v})]_\gamma = [f]_\beta^\gamma \cdot [\bar{v}]_\beta$

La $\bar{v} \in V$ være vilkårlig. Definér lineærtransformasjoner

$$\begin{cases} \psi_{\bar{v}} : F \to V \\ \quad a \mapsto a\bar{v} \end{cases} \quad \text{og} \quad \begin{cases} \theta_{\bar{v}} : F \to W \\ \quad a \mapsto a f(\bar{v}) \end{cases}$$

Merk at $\theta_{\bar{v}} \overset{(*)}{=} f \circ \psi_{\bar{v}}$.

Siden $\alpha = \{1\} \subset F$ er en ordna basis for F kan vi bruke TEOREM II fra FORELESNING E8:

$$\begin{aligned}
[f(\bar{v})]_\gamma &= [\theta_{\bar{v}}(1)]_\gamma \\
&= [\theta_{\bar{v}}]_\alpha^\gamma \\
&\overset{(*)}{=} [f \circ \psi_{\bar{v}}]_\alpha^\gamma
\end{aligned}$$

TEOREM II fra FORELESNING E8 $\longrightarrow = [f]_\beta^\gamma \cdot [\psi_{\bar{v}}]_\alpha^\beta = [f]_\beta^\gamma \cdot [\psi_{\bar{v}}(1)]_\beta = [f]_\beta^\gamma \cdot [\bar{v}]_\beta$.