LØSNINGSFORSLAG TIL UTVALGTE OPPGAVER

SAMARBEIDSOPPGAVER S8

OPPGAVE S8.1

a) Vi må skrive p som en "ordnet" linearkombinasjon av vektorene : $\beta = \{1, x, x^2\}$

Altså, vi må finne $a, b, c \in \mathbb{R}$ slik at

$$p = 7 - x + 2x^2 = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 .$$

Dette er kjempelett : $a = 7$, $b = -1$, $c = 2$.

Det betyr at

$$\underline{\underline{[p]_\beta = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

OPPGAVE S8.1

b) Vi må skrive p som en "ordnet" linearkombinasjon av vektorene : $\beta = \{1+x+x^2, x+x^2, x^2\}$.

Altså, vi må finne $a,b,c \in \mathbb{R}$ slik at

$$p = 7 - x + 2x^2 = a\cdot(1+x+x^2) + b\cdot(x+x^2) + c\cdot x^2 .$$

Høyresida her er det samme som

$$a + (a+b)x + (a+b+c)x^2.$$

Altså får vi systemet

$$\left.\begin{aligned} a \quad\quad\quad &= 7 \\ a + b \quad\; &= -1 \\ a + b + c &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \text{Løsning: } a=7,\; b=-8,\; c=3$$

Det betyr at

$$\underline{\underline{[p]_\beta = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

OPPGAVE S8.1

c) Vi må skrive p som en "ordnet" linearkombinasjon av vektorene : $\beta = \{1, x, x^2\}$

Altså, vi må finne $a, b, c \in \mathbb{R}$ slik at

$$p = 1 + 2x + 5x^2 = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 .$$

Dette er kjempelett : $a = 1$, $b = 2$, $c = 5$.

Det betyr at

$$[p]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

OPPGAVE S8.1

d) Vi må skrive p som en "ordnet" lineærkombinasjon av vektorene : $\beta = \{1+x,\ 1+x^2,\ x+x^2\}$

Altså, vi må finne $a, b, c \in \mathbb{R}$ slik at

$$p = 1+2x+5x^2 = a\cdot(1+x) + b(1+x^2) + c(x+x^2).$$

Høyresida her er det samme som

$$a+b + (a+c)x + (b+c)x^2$$

Altså får vi systemet

$$\left.\begin{aligned} a + b \phantom{{}+c} &= 1 \\ a \phantom{{}+b} + c &= 2 \\ b + c &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Løsning: $a=-1$, $b=2$, $c=3$

Det betyr at $[p]_\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

OPPGAVE S8.2

e) Her er $\bar{v} = (x,y)$ og $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$.

Vi må finne $a, b \in \mathbb{R}$ slik at

$$\bar{v} = (x,y) = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1).$$

Dette er kjempelett: $a = x$ og $b = y$. Altså,

$$\underline{\underline{[\bar{v}]_\beta = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}}$$

f) Her er $\bar{v} = (x,y)$ og $\beta = \{(1,1), (0,2)\}$.

Vi må finne $a, b \in \mathbb{R}$ slik at

$$\bar{v} = (x,y) = a \cdot (1,1) + b \cdot (0,2).$$

Dette er overkommelig: $a = x$, $b = \frac{y-x}{2}$. Altså,

$$\underline{\underline{[\bar{v}]_\beta = \begin{pmatrix} x \\ \frac{y-x}{2} \end{pmatrix}}}$$

OPPGAVE S8.3

Under "Tidligere eksamenssett" på wiki-sida finnes et løsningsforslag til denne oppgaven.

Her oppgir vi fasit:

$[T]_{B_v}^{B_w}$ med vår notasjon

a)

$$[T]_{B_w, B_v} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ og T er inverterbar.

b)

$$[\vec{v}]_{B_v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad [T(\vec{v})]_{B_w} = \begin{pmatrix} 34 \\ -8 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

OPPGAVE S8.4

a) Vi har $\beta' = \{(1,0), (0,1)\}$ og $\gamma' = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

Her har vi brukt formelen
$f(x,y) = (y, -5x+13y, -7x+16y)$

Her blir

$$f(1,0) = (0,-5,-7) = 0 \cdot (1,0,0) - 5\,(0,1,0) - 7\,(0,0,1)$$ og

$$f(0,1) = (1,13,16) = 1 \cdot (1,0,0) + 13\,(0,1,0) + 16\,(0,0,1).$$

Dermed er

$$[f]_{\beta'}^{\gamma'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 13 \\ -7 & 16 \end{pmatrix}$$

OPPGAVE S8.4

a) Legg merke til: Når vi bruker standardbasisene for $\mathbb{R}^i$ som i denne oppgaven, kan vi lese matriserepresentasjonen rett fra uttrykket for $f(\bar{v})$.

(Her hadde vi jo

$$f(x,y) = (y, -5x + 13y, -7x + 16y)$$
$$= (0 + 1y, -5x + 13y, -7x + 16y)$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 13 \\ -7 & 16 \end{pmatrix}.)$$

OPPGAVE S8.4

b) Vi har $\beta = \{(3,1), (5,2)\}$ og $\gamma = \{(1,0,-1), (-1,2,2), (0,1,2)\}$

Vi må skrive $f(3,1)$ og $f(5,2)$ som hver sin lineærkombinasjon av vektorene i γ.

Her har vi brukt formelen $f(x,y) = (y, -5x+13y, -7x+16y)$

Her blir

$$f(3,1) = (1,-2,-5) = a(1,0,-1) + b(-1,2,2) + c(0,1,2),$$

så vi får systemet

$$\left.\begin{aligned} a - b &= 1 \\ 2b + c &= -2 \\ -a + 2b + 2c &= -5 \end{aligned}\right\}$$

Løsning: $a = 1,\ b = 0,\ c = -2$

$$\Rightarrow [f(3,1)]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

OPPGAVE S8.4

Her har vi brukt formelen
$f(x,y) = (y, -5x+13y, -7x+16y)$

b) Videre blir

$$f(5,2) = (2,1,-3) = a(1,0,-1) + b(-1,2,2) + c(0,1,2),$$

som gir systemet

$$\left.\begin{aligned} a - b \quad\quad &= 2 \\ 2b + c &= 1 \\ -a + 2b + 2c &= -3 \end{aligned}\right\} \quad \text{Løsning: } a=3,\ b=1,\ c=-1$$

$$\Rightarrow [f(5,2)]_\gamma = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dermed blir

$$\underline{\underline{[f]_\beta^\gamma = \left([f(3,1)]_\gamma \,\middle|\, [f(5,2)]_\gamma\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}}$$

OPPGAVE S8.6

La $\alpha \subset \mathbb{R}^n$ og $\beta \subset \mathbb{R}^m$ være standardbasisene (ordna). Vi vet (se EKSEMPEL fra FORELESNING V8) at da er

$$\bar{v} \overset{(*)}{=} [\bar{v}]_\alpha \quad \forall \quad \bar{v} \in \mathbb{R}^n$$

og

$$\bar{w} \overset{(*)}{=} [\bar{w}]_\beta \quad \forall \quad \bar{w} \in \mathbb{R}^m .$$

Så la $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ være en lineærtransformasjon. Skriv $A = [f]_\alpha^\beta$. Da blir, for hver $\bar{v} \in V$,

$$f(\bar{v}) \overset{(*)}{=} [f(\bar{v})]_\beta = [f]_\alpha^\beta \cdot [\bar{v}]_\alpha \overset{(*)}{=} A \cdot [\bar{v}]_\alpha = A\bar{v} .$$

KOROLLAR fra FORELESNING E8

Dette viser at $f = L_A$.

OPPGAVE S8.7

a) Her nøyer vi oss med å gi svarene:

$$[f]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [g]_\gamma^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

b) Én måte å løse oppgaven på er slik:

$$[g \circ f]_\beta^\gamma = [g]_\gamma^\gamma \cdot [f]_\beta^\gamma \overset{a)}{=} \begin{pmatrix} -5 & 25 \\ 3 & -30 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

TEOREM II fra FORELESNING E8

Alternativt kan man konstruere $[g \circ f]_\beta^\gamma$ "som vanlig", altså som $[g \circ f]_\beta^\gamma = \left([g \circ f(1)]_\gamma \;\middle|\; [g \circ f(x)]_\gamma \right)$.

OPPGAVE S8.9

Husk fra et EKSEMPEL fra FORELESNING V8 at hvis $\beta' = \{1, x, x^2, x^3\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ og $\gamma' = \{1, x, x^2\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ er våre standard ordna basiser, så blir

$$[D]_{\beta'}^{\gamma'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Det betyr at de ordna basisene

$$\underline{\underline{\beta = \left\{ x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, 1 \right\}}} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{\gamma = \gamma'}} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$$

gir

$$[D]_{\beta}^{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

OPPGAVE S8.11

Vi må vise at $\phi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \longrightarrow M_{m,n}(\mathbb{R})$ er en inverterbar lineærtransformasjon.

f er lineær: Skriv

$$\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subset V \quad \text{og} \quad \gamma = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\} \subset W.$$

La nå $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$. For hver $j = 1, \dots, n$ finnes entydige $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$ slik at

$$f(\bar{v}_j) = a_{1j}\bar{w}_1 + \dots + a_{mj}\bar{w}_m \quad \text{og}$$

$$g(\bar{v}_j) = b_{1j}\bar{w}_1 + \dots + b_{mj}\bar{w}_m ,$$

slik at

$$(f+g)(\bar{v}_j) = (a_{1j} + b_{1j})\bar{w}_1 + \dots + (a_{mj} + b_{mj})\bar{w}_m .$$

OPPGAVE S8.11

Dette vil si at

Posisjonen (i,j) i matrisa $\phi(f+g)$

$$\phi(f+g)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

På den annen side er det klart at

$$\underbrace{(\phi(f)+\phi(g))_{ij}} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Posisjon (i,j) i matrisa $\phi(f)+\phi(g)$

Altså er $\phi(f+g) = \phi(f) + \phi(g)$.

Vi overlater til leseren det å sjekke at
$\phi(af) = a\,\phi(f) \quad \forall \; a \in \mathbb{R}$,
og slik fullføre argumentet for at f er linear.

OPPGAVE S8.11

f er inverterbar: La $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ være vilkårlig.
Vi vil vise: Det finnes nøyaktig én $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$
som er slik at $A = \phi(f)$. (Da er ϕ
inverterbar i følge (vår løsning av) S0.3 c).)

Men dette er ikke så ille: La oss fortsette med
$\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subset V$ og $\gamma = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\} \subset W$.
I følge TEOREM fra FORELESNING V5 finnes det jo
nøyaktig én lineærtransformasjon $f: V \to W$ som
er slik at

$$f(\bar{v}_j) = A_{1j}\bar{w}_1 + \dots + A_{mj}\bar{w}_m \quad \forall \quad j = 1, \dots, n,$$

altså, slik at $A = [f]_\beta^\gamma = \phi(f)$.

OPPGAVE S8.12

Skriv $\dim V = n$ og $\dim W = m$.

"Isomorft med"

Vi vet (S.8.10) at $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W) \cong M_{m,n}(\mathbb{R})$.

Dermed blir

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)) \overset{S7.4}{=} \dim(M_{m,n}(\mathbb{R})) = \underline{\underline{m \cdot n}}.$$

Hvorfor?

OPPGAVE S8.13

Advarsel: Her kan man bli frista til å bruke S8.12, men denne strategien forutsetter at V er endeligdimensjonalt!

I stedet definerer vi, for et vilkårlig $\mathbb{R}$-vektorrom V, en funksjon

$$\begin{cases} \phi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, V) \longrightarrow V \\ \qquad f \longmapsto f(1) \end{cases}$$

Tallet 1! Merk at $f(1) \in V$.

Vi overlater til leseren det å sjekke at

i) ϕ er en lineærtransformasjon og at

ii) ϕ er inverterbar.