LØSNINGSFORSLAG TIL UTVALGTE OPPGAVER

SAMARBEIDSOPPGAVER S7

OPPGAVE S7.1 (Her bruker vi Proposisjon fra Forelesning V7)

a) Vi påstår at f er en isomorfi.

Merk at det holder å vise at $\operatorname{Ker} f = \{\bar{0}\}$.

$$\operatorname{Ker} f = \{\bar{0}\} \Rightarrow f \text{ injektiv}$$
$$\Downarrow$$
$$\dim(\operatorname{Ker} f) = 0 \Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = \dim \mathbb{R}^2, \text{ i.e.}$$
$$f \text{ surjektiv}$$

Det faktum at $\operatorname{Ker} f = \{\bar{0}\}$ følger lett:

$$(x,y) \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(x,y) = (x, x+y) = (0,0)$$
$$\Rightarrow x = 0 \text{ og } y = 0,$$
$$\text{i.e. } (x,y) = \bar{0}.$$

OPPGAVE S7.1

(Her bruker vi PROPOSISJON fra FORELESNING V7)

b) Vi påstår at g ikke er en isomorfi.

Det holder å observere at $g(\underbrace{1,0,0}_{\neq \bar{0}}) = \bar{0}$, så $\operatorname{Ker} g \neq \{\bar{0}\}$, så g er ikke injektiv.

c) Vi påstår at s ikke er en isomorfi.

Det holder å observere at $s(\underbrace{1,0,0,\dots}_{\neq \bar{0}}) = \bar{0}$ så $\operatorname{Ker} s \neq \{\bar{0}\}$, så s er ikke injektiv.

OPPGAVE S7.1 (Her bruker vi Proposisjon fra Forelesning V7)

d) Vi påstår at m ikke er en isomorfi.

Det holder å observere at $x \notin \operatorname{Im} m$, så $\operatorname{Im} m \neq \mathbb{R}[x]$, så m er ikke surjektiv.

OPPGAVE S7.2

a) Anta at f og g er inverterbare. Da finnes

$$f^{-1} : V \to U \quad \text{slik at} \quad f \circ f^{-1} \overset{(*)}{=} id_V \quad \text{og} \quad f^{-1} \circ f \overset{(**)}{=} id_U$$

og

$$g^{-1} : W \to V \quad \text{slik at} \quad g \circ g^{-1} \overset{(*)}{=} id_W \quad \text{og} \quad g^{-1} \circ g \overset{(**)}{=} id_V$$

Det følger at $f^{-1} \circ g^{-1}$ er en invers til $g \circ f$, altså at $g \circ f$ er inverterbar med $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$:

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \overset{(*)}{=} g \circ id_V \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} \overset{(*)}{=} id_W$$

og

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \overset{(**)}{=} f^{-1} \circ id_V \circ f = f^{-1} \circ f \overset{(**)}{=} id_U$$

OPPGAVE S7.2 (Her bruker vi Proposisjon fra Forelesning V7)

b) Vil vise: $g \circ f$ inverterbar $\Rightarrow$ f injektiv

Ekvivalent: f ikke injektiv $\Rightarrow$ $g \circ f$ ikke inverterbar

Så anta at f ikke er injektiv. Da er $\operatorname{Ker} f \neq \{\bar{0}\}$, så det finnes $\bar{0}_U \neq \bar{u} \in U$ slik at $f(\bar{u}) = \bar{0}_V$. Da er

$$g \circ f(\bar{u}) = g(f(\bar{u})) = g(\bar{0}_V) = \bar{0}_W,$$

altså $\bar{u} \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$. Siden $\bar{u} \neq \bar{0}_U$ har vi vist at $\operatorname{Ker}(g \circ f) \neq \{\bar{0}\}$, så $g \circ f$ er ikke injektiv og dermed ikke inverterbar.

OPPGAVE S7.2 (Her bruker vi Proposisjon fra Forelesning V7)

c) Vil vise: $g \circ f$ inverterbar $\Rightarrow$ g surjektiv

Ekvivalent: g ikke surjektiv $\Rightarrow$ $g \circ f$ ikke inverterbar

Så anta at g ikke er surjektiv. Da er $\operatorname{Im} g \neq W$, så det finnes en $\bar{w} \in W$ slik at $\bar{w} \notin \operatorname{Im} g$. Det vil si at

$$\bar{w} \neq g(\bar{v}) \quad \forall \; \bar{v} \in V$$

Spesielt må

$$\bar{w} \neq g(f(\bar{u})) \quad \forall \; \bar{u} \in V.$$

Det vil si $\bar{w} \notin \operatorname{Im}(g \circ f)$, så $g \circ f$ er ikke surjektiv, og dermed ikke inverterbar.

OPPGAVE S7.3 (Her bruker vi Proposisjon fra Forelesning V7)

Skal vise: $g \circ f$ inverterbar $\Leftrightarrow$ f og g inverterbare

$\Leftarrow$: Dette så vi i S7.2a).

$\Rightarrow$: Anta at $g \circ f$ er inverterbar.

Per S7.2b) er da f injektiv. Nå gir S6.6 at f også er surjektiv. Altså er f inverterbar.

På den annen hånd er g surjektiv per S7.2c). Nå gir S6.6 at g også er injektiv. Altså er g inverterbar.

OPPGAVE S7.4 (Her bruker vi Proposisjon fra Forelesning V7)

Skal vise: $V \cong W \iff \dim V = \dim W$

$\Rightarrow$: Anta at $V \cong W$. Da finnes en isomorfi $f: V \to W$. Siden f er inverterbar har vi:

$\operatorname{Ker} f = \{\bar{0}\}$, så $\dim(\operatorname{Ker} f) \overset{(*)}{=} 0$ og

$\operatorname{Im} f = W$. så $\dim(\operatorname{Im} f) \overset{(**)}{=} \dim W$.

Fundamentalteoremet fra V6 gir nå

(*) og (**)

$$\boxed{\dim V} = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \boxed{\dim W}$$

OPPGAVE S7.4 (Her bruker vi PROPOSISJON fra FORELESNING V7)

Skal vise: $V \cong W \iff \dim V = \dim W$

$\Leftarrow$: Anta at $\dim V = \dim W$. Da finnes basiser

$\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subset V$ og $\beta = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\} \subset W$.

Definér (v.h.a. TEOREM fra FORELESNING V5) en lineærtransformasjon $f : V \longrightarrow W$ ved $f(\bar{v}_i) = \bar{w}_i \ \forall i$.

Dette vil si at

Slik ser en vilkårlig $\bar{v} \in V$ ut!

$$f(\underbrace{a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n}) = a_1\bar{w}_1 + \dots + a_n\bar{w}_n.$$

Da har vi at

- f er sorjektiv (span$(\beta) = W$) og at
- f er injektiv (β er lineært uavhengig).

Altså er f invertebar (a.k.a. en isomorfi), som betyr $V \cong W$.

OPPGAVE S7.5

a), b) Rutinemessig (bruk PROPOSISJON I fra FORELESNING V2)

c) Her har vi en isomorfi:

$$\begin{cases} f: U \longrightarrow V \\ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \end{cases}$$

Leseren kan selv sjekke at:

- $f(\bar{u}+\bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v})$
- $f(a\bar{u}) = a f(\bar{u})$

Så f er lineær

- $\text{Ker } f = \{\bar{0}\}$
- $\text{Im } f = V$

Så f er inverterbar

OPPGAVE S7.6

b) Skal vise: f surjektiv $\Leftrightarrow$ $\exists\, h: W \to V$ s.a. $f \circ h = id_W$.

$\Rightarrow$: Anta at f er surjektiv. La $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subset V$ være en basis. Da er

$$\operatorname{span}(f(\bar{v}_1), \dots, f(\bar{v}_n)) = W \quad (\text{hvorfor?}),$$

så det finnes en basis for W på formen $\{f(\bar{v}_1), \dots, f(\bar{v}_t)\}$ med $t \leq n$ (her har vi brukt PROPOSISJON I i) fra FORELESNING V4 (og muligens endret rekkefølgen på vektorene $f(\bar{v}_i) \in W$)). Nå kan vi definere en lineærtransformasjon $h: W \to V$ ved

$$h(f(\bar{v}_i)) = \bar{v}_i \quad \forall\, i = 1, \dots, t$$

(som i TEOREM fra V5), og det er klart at $f \circ h = id_W$.

OPPGAVE S7.6

b) Skal vise: f surjektiv $\Leftrightarrow$ $\exists\, h : W \to V$ s.a. $f \circ h = id_W$.

$\Leftarrow$: Anta at $h : W \to V$ er slik at $f \circ h = id_W$.

Vi skal vise at f er surjektiv. Så la $\bar{w} \in W$. Da er

$$\bar{w} = id_W(\bar{w}) = f \circ h(\bar{w}) = f(\underbrace{h(\bar{w})}_{\in V}) \in \operatorname{Im} f,$$

som betyr at

$$\operatorname{Im} f = W,$$

altså at f er surjektiv.

OPPGAVE S7.7

Dette følger umiddelbart fra S7.6a) og S7.6b).