MA1202/6202

LØSNINGSFORSLAG TIL UTVALGTE OPPGAVER

SAMARBEIDSOPPGAVER S6

OPPGAVE S6.1

a) $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^2$: La $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Da er

$$(a,b) = f(a, b-a) \in \mathrm{Im}\, f.$$

$\mathrm{Ker}\, f = \{\bar{o}\}$: La $\bar{v} = (x,y) \in \mathrm{Ker}\, f$. Da er

$$(0,0) = \bar{o} = f(\bar{v}) = f(x,y) = (x, x+y),$$

som impliserer $x=0$ og $y=0$, altså $\bar{v} = \bar{o}$.

OPPGAVE S6.1

b) $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}$: For hver $a \in \mathbb{R}$ har vi:

$$a = g(0,0,a) \in \operatorname{Im} g$$

$\operatorname{Ker} g = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$: Vi ser at

$$g(x,y,z) = \bar{0} \iff z = 0.$$

"z" "Tallet 0"

OPPGAVE S6.2

a) La $\bar{u} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Da er $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots)$, $u_i \in \mathbb{R}$, og vi har

$$s(\bar{u}) = (u_2, u_3, u_4, \dots).$$

Altså er $s(\bar{u}) = \bar{o} \iff o = u_2 = u_3 = u_4 = \dots$

Det vil si at

$$\text{Ker } s = \{(x, 0, 0, \dots) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

$$\underbrace{\text{Siden Ker } s \neq \{\bar{o}\} \text{ er } s \text{ ikke injektiv.}}$$

Dette er vårt TRIKS! fra Forelesning V6

OPPGAVE S6.2

b) La $\bar{v} = (v_1, v_2, v_2, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ være vilkårlig.

Hvis vi lar $\bar{w} = (0, v_1, v_2, v_3, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,
så blir

$$\bar{v} = s(\bar{w}) \in \operatorname{Im} s.$$

Det betyr at $\operatorname{Im} s = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, og s er surjektiv.

OPPGAVE S6.4

Her bruker vi FUNDAMENTALTEOREMET (V6), som sier $\dim V \overset{(*)}{=} \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f)$.

$$f \text{ injektiv} \iff \dim \operatorname{Ker} f = 0$$
$$\overset{(*)}{\iff} \dim \operatorname{Im} f = \dim V \quad (= \dim W)$$
$$\iff \operatorname{Im} f = W$$
$$\iff f \text{ surjektiv} \quad \iff \quad \operatorname{Im} f = W$$
$$\iff \dim(\operatorname{Im} f) = \dim W$$

(Hvor brukte vi TRIKS! eller S4.6?)

OPPGAVE S6.5

a) FUNDAMENTALTEOREMET for lineærtransformasjoner (V6) sier $\dim V = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f)$.

Det betyr at

$$\begin{aligned} \boxed{\dim(\operatorname{Im} f)} &= \dim V - \underbrace{\dim(\operatorname{Ker} f)}_{\geq 0} \\ &\leq \dim V \\ &\boxed{< \dim W} \end{aligned}$$

Per antagelse $\rightarrow$

Dermed kan vi bruke S4.6 som sier at nå må $\boxed{\operatorname{Im} f \subsetneq W}$, så f er ikke surjektiv.

"Ekte underrom", altså $\operatorname{Im} f \subset W$ og $\operatorname{Im} f \neq W$.

OPPGAVE S6.5

b) FUNDAMENTALTEOREMET for lineærtransformasjoner (V6) sier $\dim V = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f)$.

Det betyr at

$$\dim(\operatorname{Ker} f) = \dim V - \dim(\operatorname{Im} f)$$

$\dim(\operatorname{Im} f) \leq \dim W \longrightarrow$ $$\geq \dim V - \dim W$$

$$> 0$$

Per antagelse

Dermed er $\operatorname{Ker} f \neq \{\bar{0}\}$,
så f er ikke injektiv (husk vårt TRIKS! fra V6).

OPPGAVE S6.6

$t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t(\bar{e}_1) = (1, 2, 3)$

$t(\bar{e}_2) = (4, 5, 6)$

a) $\dim \mathbb{R}^2 < \dim \mathbb{R}^3$, så i følge S6.5 er t ikke surjektiv.

OPPGAVE S6.6

$t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t(\bar{e}_1) = (1,2,3)$

$t(\bar{e}_2) = (4,5,6)$

b) La $\bar{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Da er

$$\bar{v} = (x,0) + (0,y) \overset{(*)}{=} x \cdot \bar{e}_1 + y \cdot \bar{e}_2$$

Det betyr, siden $t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ skal være en lineærtransformasjon, at vi må ha

$$t(\bar{v}) \overset{(*)}{=} t(x \cdot \bar{e}_1 + y \cdot \bar{e}_2)$$

$t(\bar{u}+\bar{w}) = t(\bar{u}) + t(\bar{w}) \longrightarrow$ $= t(x \cdot \bar{e}_1) + t(y \cdot e_2)$

$= x \cdot t(\bar{e}_1) + y \cdot t(\bar{e}_2)$ Disse kjenner vi!

$t(a\bar{v}) = a\,t(\bar{v})$

$$= x \cdot (1,2,3) + y \cdot (4,5,6)$$

$$= (x, 2x, 3x) + (4y, 5y, 6y)$$

$$= \underline{\underline{(x+4y,\ 2x+5y,\ 3x+6y)}}$$

OPPGAVE S6.6

$t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t(\bar{e}_1) = (1,2,3)$

$t(\bar{e}_2) = (4,5,6)$

c) Det er ikke vanskelig å vise direkte (klarer du det?) at $\text{Ker } t = \{\bar{o}\}$.

Men det er kanskje enda lettere å innse at $\dim(\text{Im } t) = 2$ (hvorfor?). Da gir FUNDAMENTALTEOREMET fra FORELESNING V6 at

$$\dim(\text{Ker } t) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim(\text{Im } t) = 2-2=0,$$

altså at $\text{Ker } t = \{\bar{o}\}$.

I alle fall har vi at t er injektiv ved TRIKS! fra FORELESNING V6.

OPPGAVE S6.7

$r(\bar{e}_1) = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$
$r(\bar{e}_2) = 2\bar{e}_2$
$r(\bar{e}_3) = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$

a) Vi lar $\bar{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Da er

$$\bar{v} = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z) \overset{(*)}{=} x\cdot\bar{e}_1 + y\cdot\bar{e}_2 + z\cdot\bar{e}_3.$$

Det betyr, siden $r : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ skal være en lineær operator, at vi må ha

$$r(\bar{v}) \overset{(*)}{=} r(x\cdot\bar{e}_1 + y\cdot\bar{e}_2 + z\cdot\bar{e}_3)$$

$f(\bar{u}+\bar{w}) = f(\bar{u}) + f(\bar{w})$

$$= r(x\cdot\bar{e}_1) + r(y\cdot e_2) + r(z\cdot\bar{e}_3)$$

Disse kjenner vi!

$f(a\bar{u}) = af(\bar{u})$

$$= x\cdot r(\bar{e}_1) + y\cdot r(\bar{e}_2) + z\cdot r(e_3)$$

$$= x\cdot(\bar{e}_2 + \bar{e}_3) + y\cdot 2\bar{e}_2 + z(-2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 3\bar{e}_3)$$

$$= -2z\cdot\bar{e}_1 + (x+2y+z)\bar{e}_2 + (x+3z)\bar{e}_3$$

$$= (-2z,0,0) + (0,x+2y+z,0) + (0,0,x+3z)$$

$$\underline{\underline{= (-2z,\ x+2y+z,\ x+3z)}}.$$

OPPGAVE S6.7

$r(\bar{e}_1) = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$
$r(\bar{e}_2) = 2\bar{e}_2$
$r(\bar{e}_3) = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$

b) Her kan vi observere at $r = L_A$ for matrisa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hvordan kom vi fram til denne matrisa?

"Left"

(Altså at r er gitt ved "multiplikasjon fra venstre med A", i.e. $r(\bar{v}) = A\bar{v} \quad \forall \, \bar{v} \in \mathbb{R}^3$, som i et tidlig EKSEMPEL fra FORELESNING V5.)

Det er en smal sak å sjekke at nullity $A = 0$, så $\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} L_A = \{\bar{0}\}$ (se første EKSEMPEL fra FORELESNING V6). Nå gir TRIKS! fra FORELESNING V6 at r er injektiv.

OPPGAVE S6.7

$$r(\bar{e}_1) = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$$
$$r(\bar{e}_2) = 2\bar{e}_2$$
$$r(\bar{e}_3) = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$$

c) FUNDAMENTALTEOREMET fra FORELESNING V6 gir

$$\dim(\operatorname{Im} f) = \underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{=3} - \overbrace{\dim(\operatorname{Ker} f)}^{=0 \text{ i følge b)}} = 3,$$

som betyr at $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ (her bruker vi: S4.6b)), altså at f er surjektiv.

OPPGAVE S6.8

$s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$s(1,0) = (1,2,1)$

$s(1,1) = (1,1,0)$

a) $\dim \mathbb{R}^2 < \dim \mathbb{R}^3$, så i følge S6.5 er s ikke surjektiv.

OPPGAVE S6.8

$s: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$s(1,0) = (1,2,1)$

$s(1,1) = (1,1,0)$

b) La $\bar{v} = (5,2) \in \mathbb{R}^2$ og skriv

$\bar{e}_1 = (1,0)$ og $\bar{u} = (1,1)$.

Vi starter med å skrive $\bar{v}$ som en lineær-kombinasjon av $\bar{e}_1$ og $\bar{u}$. Dette er lett:

$$\bar{v} \overset{(*)}{=} 3 \cdot \bar{e}_1 + 2 \cdot \bar{u}.$$

Nå går resten av regninga langs de samme linjene som S6.6 b) og S6.7 a): Siden $s: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ skal være lineær, må

$$s(\bar{v}) \overset{(*)}{=} s(3 \cdot \bar{e}_1 + 2 \cdot \bar{u})$$

$$= 3 \cdot \underbrace{s(\bar{e}_1)}_{\text{Kjent!}} + 2 \cdot \underbrace{s(\bar{u})}_{\text{Kjent!}} = 3 \cdot (1,2,1) + 2 \cdot (1,1,0) = \underline{\underline{(5,8,3)}}.$$

OPPGAVE S6.9

Anta at $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subset V$ er lineart uavhengig og at $f: V \to W$ er injektiv.
Vil vise: $\{f(\bar{v}_1), \dots, f(\bar{v}_n)\} \subset W$ er lineart uavhengig.

Så anta at vi har $\bar{0}_W \overset{(*)}{=} a_1 f(\bar{v}_1) + \dots + a_n f(\bar{v}_n)$.
Skal vise: $\boxed{a_1 = \dots = a_n = 0}$.

Vi får nå

Fordi f er linear

$$f(a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n) = a_1 f(\bar{v}_1) + \dots + a_n f(\bar{v}_n) \overset{(*)}{=} \bar{0}_W,$$

altså $a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n \in \operatorname{Ker} f$. Men siden f er injektiv, impliserer dette $a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n = \bar{0}_V$.
Siden $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ er lineart avhengig, impliserer dette at $\boxed{a_1 = \dots = a_n = 0}$.

OPPGAVE S6.10

Se på nulloperatoren

$$\begin{cases} f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \quad (x,y) \longmapsto (0,0) \end{cases}$$

Mengden $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ er lineært uavhengig.
men $\{f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2)\} = \{\bar{0}\}$ er lineært avhengig.

OPPGAVE S6.12

Anta at $\varepsilon^2 = 0$. La $\bar{u} \in \operatorname{Im} \varepsilon$. Da finnes $\bar{v} \in V$ slik at $\bar{u} = \varepsilon(\bar{v})$, og vi får

$$\varepsilon(\bar{u}) = \varepsilon(\varepsilon(\bar{v})) = \varepsilon^2(\bar{v}) = \bar{0},$$

altså $\bar{u} \in \operatorname{Ker} \varepsilon$. Dette viser at $\operatorname{Im} \varepsilon \subset \operatorname{Ker} \varepsilon$.

Anta nå at $\operatorname{Im} \varepsilon \subset \operatorname{Ker} \varepsilon$. La $\bar{w} \in V$ være vilkårlig. Da er

$$\varepsilon^2(\bar{w}) = \varepsilon(\underbrace{\varepsilon(\bar{w})}_{\in \operatorname{Im} \varepsilon \subset \operatorname{Ker} \varepsilon}) = \bar{0},$$

som viser at $\varepsilon^2 = 0$.

OPPGAVE S6.13

Skal vise: $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ s.a. $f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$ $\forall\ \bar{v} \in V$.

Så la $\bar{v} \in V$ være vilkårlig. Siden $\dim V = 1$, har V en basis på formen $\{\bar{w}\} \subset V$. Det betyr at

- det finnes en $\alpha \in \mathbb{R}$ s.a. $\bar{v} \overset{(*)}{=} \alpha \bar{w}$ og at
- det finnes en $\lambda \in \mathbb{R}$ s.a. $f(\bar{w}) \overset{(**)}{=} \lambda \bar{w}$.

Det følger at

$$f(\bar{v}) \overset{(*)}{=} f(\alpha \bar{w}) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ lineær}}}{=} \alpha f(\bar{w}) \overset{(**)}{=} \alpha(\lambda \bar{w}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vektorromsaksiom } \overline{\text{V}} \\ (\text{og } \alpha\lambda = \lambda\alpha)}}{=} \lambda(\alpha \bar{w}) \overset{(*)}{=} \lambda f(\bar{v}).$$