MA1202/6202

LØSNINGSFORSLAG TIL UTVALGTE OPPGAVER

SAMARBEIDSOPPGAVER S5

OPPGAVE S5.1

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$f(1,1,1) = (1,3)$

$f(0,1,0) = (2,5)$

Skriv $\bar{u} = (1,1,1)$, $\bar{v} = (0,1,0)$ og $\bar{w} = (1,-1,1)$.

Poenget her er at siden f er lineær og vi kjenner $f(\bar{u})$ og $f(\bar{v})$, så kan vi finne regelen for f på hele $\text{span}(\bar{u},\bar{v})$. Så siden

$$\bar{w} = \bar{u} - 2\bar{v} \in \text{span}(\bar{u},\bar{v})$$

kan vi regne ut $f(\bar{w})$:

$$f(\bar{w}) = f(\bar{u} - 2\bar{v})$$

f er lineær, så

$f(\bar{x}+\bar{y}) = f(\bar{x}) + f(\bar{y})$

$f(a\bar{x}) = af(\bar{x})$

$$= f(\bar{u}) - f(2\bar{v})$$

$$= \underbrace{f(\bar{u})}_{\text{Kjent!}} - 2 \cdot \underbrace{f(\bar{v})}_{\text{Kjent!}} = (1,3) - 2\cdot(2,5) = \underline{\underline{(-3,-7)}}$$

OPPGAVE S5.3

La $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Da er

$$\bar{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots) \quad , u_i \in \mathbb{R} \quad \text{og}$$
$$\bar{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots) \quad , v_i \in \mathbb{R}.$$

Vi sjekker det ene kravet i definisjonen av lineærtransformasjon:

$$\begin{aligned}
s(\bar{u}+\bar{v}) &= s((u_1, u_2, u_3, \dots) + (v_1, v_2, v_3, \dots)) \\
&= s((u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3, \dots)) \\
&= (u_2+v_2, u_3+v_3, u_4+v_4, \dots) \\
&= (u_2, u_3, u_4, \dots) + (v_2, v_3, v_4, \dots) \\
&= s((u_1, u_2, u_3, \dots)) + s((v_1, v_2, v_3, \dots)) \\
&= s(\bar{u}) + s(\bar{v}). \checkmark
\end{aligned}$$

OPPGAVE S5.3

La $a \in \mathbb{R}$. Vi sjekker det andre kravet i definisjonen av lineærtransformasjon:

$$
\begin{aligned}
s(a\bar{v}) &= s(a(v_1, v_2, v_3, \dots)) \\
&= s((av_1, av_2, av_3, \dots)) \\
&= (av_2, av_3, av_4, \dots) \\
&= a(v_2, v_3, v_4, \dots) \\
&= a\, s((v_1, v_2, v_3, \dots)) \\
&= a\, s(\bar{v}).
\end{aligned}
$$

Dette viser at $s : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ er en lineær operator.

OPPGAVE S5.4

La $p, q \in \mathbb{R}[x]$ og $a \in \mathbb{R}$. Vi sjekker:

$$m(p+q) = x^2(p+q) = x^2 p + x^2 q = m(p) + m(q) \checkmark$$

$$m(ap) = x^2(ap) = a x^2 p = a\, m(p) \checkmark$$

Dette viser at $m : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ er en lineær operator.

OPPGAVE S5.6

Anta at $f: U \to V$ og $g: V \to W$ er lineærtransformasjoner.

La $\bar{u}, \bar{v} \in U$. Da blir

$$(g \circ f)(\bar{u}+\bar{v}) = g(f(\bar{u}+\bar{v})) = g(f(\bar{u}) + f(\bar{v}))$$
$$= g(f(\bar{u})) + g(f(\bar{v}))$$
$$= (g \circ f)(\bar{u}) + (g \circ f)(\bar{v}).$$

f er lineær

g er lineær

Definisjon av g∘f

Forklar selv hvorfor vi har hver av disse likhetene!

La $a \in F$. Da blir

$$(g \circ f)(a\bar{u}) = g(f(a\bar{u})) = g(a f(\bar{u})) = a g(f(\bar{u}))$$
$$= a (g \circ f)(\bar{u}).$$

Dette viser at $g \circ f$ er en lineærtransformasjon.

OPPGAVE S3.7

Dette kan vises slik:

La $\bar{v} \in V$ være vilkårlig. Da er

Nullvektor i V　　　　Skalar　　　　Nullvektor i W

$$f(\bar{0}_V) = f(0\,\bar{v}) = 0\, f(\bar{v}) = \bar{0}_W$$

f er lineær

OPPGAVE S1.2.b)

OPPGAVE S5.9

Her er et moteksempel:

Se på de lineære operatorene

Sjekk selv at f og g er lineære!

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \quad (x,y) \longmapsto (y,x) \end{cases} \qquad \begin{cases} g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \quad (x,y) \longmapsto (x,0) \end{cases}$$

Da har vi $f \circ g \neq g \circ f$:

$$\begin{cases} f \circ g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \quad (x,y) \longmapsto (0,x) \end{cases} \qquad \begin{cases} g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \quad (x,y) \longmapsto (y,0) \end{cases}$$

OPPGAVE S5.10

Anta at $\{f(\bar{v}_1), \dots, f(\bar{v}_n)\} \subset W$ er lineært uavhengig.
Vil vise: $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subset V$ er lineært uavhengig

Så anta at $\bar{o}_V = a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n$.
Skal vise: $a_1 = \dots = a_n = 0$.

Antagelsen (og S5.9) gir

$$\bar{o}_W = f(\bar{o}_V) = f(a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n v_n)$$
$$= a_1 f(\bar{v}_1) + \dots + a_n f(\bar{v}_n).$$

Nå gir antagelsen at $a_1 = \dots = a_n = 0$.

OPPGAVE S5.11

a) Et eksempel er funksjonen $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved regelen

$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{hvis} \quad y = 0 \\ y & \text{hvis} \quad y \neq 0 . \end{cases}$$

(Her blir $f(a(x,y)) = a f(x,y) \;\; \forall \;\; a, x, y \in \mathbb{R}$,
men for eksempel er
$f((1,1)) = 1 \neq 2 = 1 + 1 = f((1,0)) + f((0,1))$.)

OPPGAVE S5.11

b) Et eksempel er funksjonen $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ gitt ved regelen $g(z) = \overline{z}$ $\forall$ $z \in \mathbb{C}$.

Den komplekskonjugerte av z

(Her blir $g(z_1 + z_2) = g(z_1) + g(z_2)$ $\forall$ $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,
men for eksempel er

$$i\, g(i) = i \cdot (-i) = -i^2 = 1$$

$$\neq -1 = g(-1) = g(i^2) = g(i \cdot i)\,.)$$

OPPGAVE S5.12

La $\bar{u}, \bar{v} \in V$. Da er

$$(af)(\bar{u}+\bar{v}) = af(\bar{u}+\bar{v}) = a\big(f(\bar{u})+f(\bar{v})\big)$$
$$= af(\bar{u}) + af(\bar{v})$$
$$= (af)(\bar{u}) + (af)(\bar{v}).$$

For hver $\lambda \in \mathbb{R}$ får vi:

$$(af)(\lambda\bar{u}) = af(\lambda\bar{u}) = a\lambda f(\bar{u})$$
$$= \lambda a f(\bar{u})$$
$$= \lambda (af)(\bar{u}).$$

Dette viser at af er en lineærtransformasjon.