MA1202/6202

LØSNINGSFORSLAG TIL UTVALGTE OPPGAVER

SAMARBEIDSOPPGAVER S4

OPPGAVE S4.1

a) Vi bruker standardmetoden (PROPOSISJON , FORELESNING 2).

i) $\bar{0} = (0,0,0) \in U$ er opplagt

ii) $\bar{u}, \bar{v} \in U \Rightarrow \bar{u} = (a,b,a), \bar{v} = (c,d,c)$

$\Rightarrow \bar{u} + \bar{v} = (a+c, b+d, a+c) \in U$

iii) $\bar{u} \in U \Rightarrow \bar{u} = (a, b, \bar{a})$

$\Rightarrow r\bar{u} = (ra, rb, ra) \in U \quad \forall r \in \mathbb{R}.$

Siden $U \subset \mathbb{R}^3$ oppfyller i), ii) og iii) er U et underrom.

OPPGAVE S4.1

b) Skriv $B = \{(1,0,1), (0,1,0)\}$.

B utspenner U: For hver $\bar{u} \in U$ har vi
$$\bar{u} = (a,b,a) = a \cdot (1,0,1) + b \cdot (0,1,0) \in \operatorname{span}(B)$$

B er lineært uavhengig: Hvis
$$(0,0,0) = \bar{0} = a \cdot (1,0,1) + b\,(0,1,0),$$
så må $a = 0 = b$.

Eventuelt: $(1,0,1)$ er ikke et skalarmultiplum av $(0,1,0)$, så B er lineært uavhengig: følge S3.8

OPPGAVE S4.2

a) NEI, enhver basis for $\mathbb{C}^4$ inneholder $\dim \mathbb{C}^4 = 4$ elementer.

b) NEI, enhver basis for $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ inneholder $\dim \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = 3$ elementer

OPPGAVE 54.3

"Uten Tap Av Generalitet"

Vi kan anta UTAG at $i < j \Rightarrow \deg(p_i) < \deg(p_j)$ (altså at disse polynomene er sortert etter stigende grad). Anta nå at

$$0 = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n \quad \text{med } a_i \in \mathbb{R}.$$

Da må $a_n = 0$ (hvorfor?), så

$$0 = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_{n-1} p_{n-1}.$$

Da må $a_{n-1} = 0$ (hvorfor?), og slik får vi også $a_{n-2} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$.

Dette viser at $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ er lineært uavhengig.

OPPGAVE S4.4

Vi vet (TEOREM fra FORELESNING 4) at V har en basis B. Da er det klart at delmengden $B \cup S$ utspenner V. Bruk nå LEMMA I fra FORELESNING E3 til å redusere $B \cup S$ til en basis B' for V. Da vet vi, siden S er lineært uavhengig, at B' består av S og deler av B (ingen vektor fra S blir fjerna i reduksjonsprosessen).

OPPGAVE S4.6

a) La B være en basis for U og la B' være en basis for V. Da har vi at

- B er lineært uavhengig i V og at
- B' genererer V.

Da gir LEMMA II fra FORELESNING E3 at

$$\dim U = |B| \leq |B'| = \dim V$$

OPPGAVE S4.6

b) $U = V \Rightarrow \dim U = \dim V$ er selvsagt opplagt.

Anta nå at $\dim U = \dim V = n$. Vi må vise at $U = V$, altså at $V \subset U$ ($U \subset V$ er jo en del av premisset for oppgaven). La $B = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ være en basis for U. Da er B en basis også for V (bruk PROPOSISJON II i) fra FORELESNING 4). Så for hver $\bar{v} \in V$ har vi:

$$\bar{v} = a_1\bar{u}_1 + \dots + a_n\bar{u}_n \in \operatorname{span}(B) = U,$$

(altså $\bar{v} \in V \Rightarrow \bar{v} \in U$).

OPPGAVE S4.7

b) Merk at $p = x \notin V$ (fordi: $p'(5) = 1 \neq 0$). Det betyr at underrommet $V \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ er et ekte underrom, altså $V \neq \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Derfor er $\dim V \overset{(*)}{\lneq} 4 = \dim \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ (S4.6). På den annen side er delmengden

"Ekte mindre enn"

$$B = \{1, (x-5)^2, (x-5)^3\} \subset V$$

lineært uavhengig (S4.3). Det betyr at $\dim V \overset{(**)}{\geq} 3$ (PROPOSISJON I fra FORELESNING 4). Nå gir $(*)$ og $(**)$ at $\dim V = 3$. Da gir PROPOSISJON II fra FORELESNING 4 at B er en basis for V.

OPPGAVE S4.10

a) Vi bruker S4.6:

La $V \subset \mathbb{R}^2$ være et underrom. Da er

$\dim V \in \{0, 1, 2\}$

Vi får

- $\dim V = 0 \iff V = \{\bar{0}\}$
- $\dim V = 1 \iff V$ er ei linje gjemom origo
- $\dim V = 2 \iff V = \mathbb{R}^2$