MA1202/6202

LØSNINGSFORSLAG TIL UTVALGTE OPPGAVER

SAMARBEIDSOPPGAVER S3

OPPGAVE S3.1

Her nøyer vi oss med å oppgi fasiten; vi antar at studentene behersker denne typen utregninger.

a) Vi har $(14, 10, 3) \notin \text{span}(\bar{u}, \bar{v})$

b) Vi har $(-26, -12, -14) = 4\bar{u} - 5\bar{v} \in \text{span}(\bar{u}, \bar{v})$.

OPPGAVE S3.2

Vi ser på $S = \{1, 2x, 1+x^2\} \subset \mathbb{R}[x]$

Anta at $0 = a \cdot 1 + b \cdot 2x + c \cdot (1+x^2)$. Dette gir

$$0 = a + c + 2bx + cx^2,$$

så vi må ha

$$\begin{aligned} a + c &= 0 \\ 2b &= 0 \\ c &= 0. \end{aligned}$$

Dette impliserer $c = 0$, $b = 0$ og $a = 0$, som viser at S er lineært uavhengig.

OPPGAVE S3.3

Inklusjonen $\mathrm{span}(f,g,h) \overset{(*)}{\subset} \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ er opplagt (graden til en lineærkombinasjon av f, g og h kan jo aldri bli >2).

For å vise at $\mathbb{C}[x]_{\leq 2} \overset{(**)}{\subset} \mathrm{span}(f,gh)$ holder det å vise at $1, x, x^2 \in \mathrm{span}(f,g,h)$ (hvorfor?). Dette er en smal sak:

$$1 = g - h \in \mathrm{span}(f,g,h) \checkmark$$
$$x = 5h - 4g \in \mathrm{span}(f,g,h) \checkmark$$
$$x^2 = f - g + h \in \mathrm{span}(f,g,h) \checkmark$$

(*) og (**) gir nå til sammen at $\mathrm{span}(f,g,h) = \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$.

OPPGAVE S3.5

Skal vise: Vektorrommet $\mathbb{R}[x]$ er uendeligdimensjonalt.

Anta at $\mathbb{R}[x]$ er endeligdimensjonalt. Da finnes en endelig basis $\{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ for $\mathbb{R}[x]$.
La

$$n = \max \{\deg p_i \mid i = 1, \ldots, s\}.$$

Da vil

$$x^{n+1} \notin \operatorname{span}(p_1, p_2, \ldots, p_s) = \mathbb{R}[x]$$

som er absurd.

Vi må konkludere med at $\mathbb{R}[x]$ ikke er endeligdimensjonalt, altså at $\mathbb{R}[x]$ er uendeligdimensjonalt.

OPPGAVE S3.6

a) NEI, fordi en utspennende mengde i $\mathbb{R}^4$ må ha minst 4 elementer

b) NEI, fordi en lineært uavhengig mengde i $\mathbb{R}^3$ kan høyst ha 3 elementer

c) NEI, fordi en lineært uavhengig mengde i $\mathbb{R}[x]_{\leq 6}$ kan høyst ha 7 elementer

d) NEI, fordi en utspennende mengde i $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ må ha minst 5 elementer

OPPGAVE S3.9

Anta at $\bar{v} \in S$ er slik at $\bar{v} \overset{(*)}{\in} \text{span}(\underbrace{S \setminus \{\bar{v}\}}_{\text{"S med } \bar{v} \text{ fjernet"}})$.

Vi kan anta $\bar{v} \neq \bar{0}$ (enhver mengde som inneholder $\bar{0}$ er lineært avhengig).

Per (*) finnes $\bar{v}_i \in S \setminus \{\bar{v}\}$, $a_i \in F$ slik at

$$\bar{v} = a_1 \bar{v}_1 + \dots + a_n \bar{v}_n .$$

Merk at her må minst én $a_i \neq 0$ (fordi $\bar{v} \neq \bar{0}$).

Da får vi:

$$\bar{0} = \bar{v} - \bar{v} = \bar{v} - a_1 \bar{v}_1 - \dots - a_n \bar{v}_n \qquad (\bar{v}, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \in S)$$

med minst én $a_i \neq 0$, som per definisjon betyr at S er lineært avhengig.

OPPGAVE S3.10

Skriv $V = \{$ kontinuerlige funksjoner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

Vektorrommet V inneholder $\mathbb{R}[x]$ som et underrom (hvert polynom er en kontinuerlig funksjon $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ på en naturlig måte). Siden $\mathbb{R}[x]$ er uendeligdimensjonalt (OPPGAVE S3.5) følger det at V er uendeligdimensjonalt (her bruker vi TEOREM fra Forelesning E3).

OPPGAVE S3.11

Vektorrommet $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ inneholder $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ som et underrom, så det holder å vise at $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ er uendeligdimensjonalt (TEOREM fra Forelesning E3).

Anta at $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ er endeligdimensjonalt. Da har $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ en endelig basis $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$. For $i = 1, \dots, n$ la

$$m_i = \max\{ j \in \mathbb{N} \mid (\bar{v}_i)_j \neq 0 \}.$$

(Så vektoren $\bar{v}_i$ har tallet null i hver koordinat "til høyre for" posisjon m_i.) La så

$$m = \max\{ m_i \mid i = 1, \dots, n \}.$$

Da vil $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \notin \operatorname{span} B = \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$, som er absurd.

posisjon $m+1$