MA1202/6202

LØSNINGSFORSLAG TIL UTVALGTE OPPGAVER

SAMARBEIDSOPPGAVER S2

OPPGAVE S2.1

a) Delmengden $A \subset \mathbb{R}^3$ er ikke et underrom fordi A ikke er lukket under addisjon (altså, A oppfyller ikke ii) fra PROPOSISJON I).

For eksempel er

$$(1,0,0) \in A \qquad (1 \cdot 0 \cdot 0 = 0)$$

og

$$(0,1,1) \in A \qquad (0 \cdot 1 \cdot 1 = 0),$$

men

$$(1,0,0) + (0,1,1) = (1,1,1) \notin A \qquad (1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \neq 0)$$

OPPGAVE S2.1

b) Delmengden $B \subset \mathbb{R}^3$ oppfyller ikke i) fra PROPOSISJON I, og er dermed ikke et underrom.

Altså, $\bar{0} = (0,0,0) \notin B$.

B oppfyller heller ikke ii) eller iii), se om du kan vise det selv.

OPPGAVE S2.2

a) Delmengden $C \subset \mathbb{R}^3$ inneholder ikke nullvektoren $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ (siden $0+2\cdot 0+3\cdot 0 = 0 \neq 4$). Dermed er C ikke et underrom, siden C ikke oppfyller krav i) fra PROPOSISJON I fra FORELESNING V2.

OPPGAVE S2.2

b) Delmengden $D \subset \mathbb{R}^3$ oppfyller i), ii) og iii) fra PROPOSISJON I og er dermed et underrom.

i) $\bar{0} = (0,0,0) \in D$ $\qquad (0 = 5 \cdot 0)$

ii) $(x_1, x_2, x_3), \; (y_1, y_2, y_3) \in D$

$\Rightarrow x_1 = 5x_3$ og $y_1 = 5y_3$.

Vi får

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in D$$

siden

$$x_1 + y_1 = 5x_3 + 5y_3 = 5(x_1 + y_1).$$

iii) $(x_1, x_2, x_3) \in D \Rightarrow x_1 = 5x_3$.

Så for hver $a \in \mathbb{R}$ blir

$$a(x_1, x_2, x_3) = (ax_1, ax_2, ax_3) \in D$$

siden $ax_1 = a \cdot 5x_3 = 5ax_3$.

OPPGAVE S2.4

Nullvektoren i V er funksjonen $0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$0(x) = 0 \quad \forall \; x \in [0,1]$$

a) • Vi har $0 \in V_0$ (siden $0(0) = 0$) ✓

• For $f, g \in V_0$ har vi:

$$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0,$$

så $f+g \in V_0$ ✓

• For $f \in V_0$ og $\lambda \in \mathbb{R}$ har vi:

$$(\lambda f)(0) = \lambda f(0) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

så $\lambda f \in V_0$ ✓

Dette viser at $V_0 \subset V$ er et underrom. $\square$

OPPGAVE S2.4

Nullvektoren i V er funksjonen $0:[0,1]\to\mathbb{R}$ gitt ved
$0(x)=0 \quad \forall \quad x\in[0,1]$

b) $V_1 \subset V$ er ikke et underrom: For eksempel er $0 \notin V_1$ (siden $0(0)=0\neq 1$). $\square$

OPPGAVE S2.5

a) Delmengden $A \subset \mathbb{R}[x]$ oppfyller i), ii) og iii) fra PROPOSISJON I og er et underrom.

i) Opplagt

ii) $p, q \in A \Rightarrow p(1) = 0$ og $q(1) = 0$

$\Rightarrow p+q(1) = p(1) + q(1) = 0 + 0 = 0$,

altså $p+q \in A$.

iii) $p \in A$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda p(1) = \lambda \cdot 0 = 0$,

altså $\lambda p \in A$.

OPPGAVE S2.5

Sjekk dette selv!

b) Delmengden $B \subset \mathbb{R}[x]$ $\underbrace{\text{bryter med i), ii) og iii)}}$ fra PROPOSISJON I, og er ikke et underrom.

OPPGAVE S2.6

Delmengden $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ oppfyller i), ii) og iii) fra PROPOSISJON I og er derfor et underrom.

i) $\bar{0} = (0, 0, \ldots) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ er opplagt

ii) Hvis $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ så har hver av $\bar{u}$ og $\bar{v}$ bare endelig mange ikke-null koordinater. Da får også $\bar{u} + \bar{v}$ bare endelig mange ikke-null koordinater, så $\bar{u} + \bar{v} \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$.

iii) Hvis $\bar{u} \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ så har $\bar{u}$ bare endelig mange ikke-null koordinater. $\forall a \in \mathbb{R}$ får også $a\bar{u}$ kun endelig mange ikke-null koordinater, så $a\bar{u} \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$.

OPPGAVE S2.10

a) Vi vet fra analysen at

i) null-funksjonen $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig;

ii) summen av to kontinuerlige funksjoner $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig; og

iii) ethvert skalarmultiplum av en kontinuerlig funksjon $[0,1] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig.

Ved PROPOSISJON I har vi et underrom av vektorrommet $\mathbb{R}^{[0,1]}$ av <u>alle</u> funksjoner $[0,1] \to \mathbb{R}$.

OPPGAVE S2.10

b) Vi vet fra analysen at

i) null-funksjonen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ er deriverbar;

ii) summen av to deriverbare funksjoner $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ er deriverbar; og

iii) ethvert skalarmultiplum av en deriverbar funksjon $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er deriverbar.

Ved PROPOSISJON I har vi: et underrom av vektorrommet $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ av <u>alle</u> funksjoner $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.