MA1202/6202

LØSNINGSFORSLAG TIL UTVALGTE OPPGAVER

SAMARBEIDSOPPGAVER S1

OPPGAVE S1.1

a) Anta at $\bar{x} + \bar{y} = \bar{x} + \bar{z}$.

Skal vise: $\boxed{\bar{y} = \bar{z}}$.

Ved VS4 finnes $\bar{w} \in V$ slik at $\bar{x} + \bar{w} = \bar{0}$. Da får vi:

$$(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{w} = (\bar{x} + \bar{z}) + \bar{w}$$

$$\overset{VS1}{\Rightarrow} (\bar{y} + \bar{x}) + \bar{w} = (\bar{z} + \bar{x}) + \bar{w}$$

$$\overset{VS2}{\Rightarrow} \bar{y} + \underbrace{(\bar{x} + \bar{w})}_{=\bar{0}} = \bar{z} + \underbrace{(\bar{x} + \bar{w})}_{=\bar{0}}$$

$$\overset{VS3}{\Rightarrow} \boxed{\bar{y} = \bar{z}}.$$

OPPGAVE S1.1

b) Anta at $\bar{x} + \bar{x} = \bar{x}$.

Skal vise: $\bar{x} = \bar{o}$.

Ved VS3 har vi: $\bar{x} + \bar{o} = \bar{x}$, så til sammen må

$$\bar{x} + \bar{x} = \bar{x} + \bar{o}.$$

Det følger fra a) at $\bar{x} = \bar{o}$.

OPPGAVE S1.2

a) Anta at $\bar{o}, \bar{o}' \in V$ er null-vektor

Skal vise: $\boxed{\bar{o} = \bar{o}'}$.

Vi får

$$\bar{o} = \bar{o} + \bar{o}' \qquad \text{(fordi } \bar{o}' \text{ er null-vektor)}$$

$$\parallel$$

$$\bar{o}' = \bar{o}' + \bar{o} \qquad \text{(fordi } \bar{o} \text{ er null-vektor)}$$

Vektorromsaksiom II
fra FORELESNING V1

Altså er $\boxed{\bar{o} = \bar{o}'}$.

OPPGAVE S1.2

b) La $\bar{v} \in V$.

Skal vise: $\overbrace{0}^{\text{Tallet null}} \cdot \bar{v} = \overbrace{\bar{0}}^{\text{Nullvektor}}$

Vi har

$$0 \cdot \bar{v} = (0+0) \cdot \bar{v} \overset{\text{VII}}{=} 0 \cdot \bar{v} + 0 \cdot \bar{v} \quad (*)$$

og dermed

$$\begin{aligned} \bar{0} &\overset{\text{IV}}{=} 0 \cdot \bar{v} - 0 \cdot \bar{v} \\ &\overset{(*)}{=} (0 \cdot \bar{v} + 0 \cdot \bar{v}) - 0 \cdot \bar{v} \\ &\overset{\text{I}}{=} 0 \cdot \bar{v} + \underbrace{(0 \cdot \bar{v} - 0 \cdot \bar{v})}_{=\bar{0}} \\ &\overset{\text{IV}}{=} 0 \cdot \bar{v}. \end{aligned}$$

Altså er $\bar{0} = 0 \cdot \bar{v}$.

OPPGAVE S1.2

c) Anta at $\bar{w}$ og $\bar{w}'$ er $-\bar{v}$. Da blir

$$\begin{aligned}\bar{w} = \bar{w} + \bar{o} &= \bar{w} + (\bar{v} + \bar{w}') \\ &= (\bar{w} + \bar{v}) + \bar{w}' \\ &= \bar{o} + \bar{w}' \\ &= \bar{w}'.\end{aligned}$$

d) La $\bar{v} \in V$. Da er

$$\bar{v} + (-1)\cdot\bar{v} = 1\cdot\bar{v} + (-1)\cdot\bar{v} = (1-1)\cdot\bar{v} \overset{a)}{=} 0\cdot\bar{v} = \bar{o},$$

altså $-\bar{v} = (-1)\cdot\bar{v}$.

OPPGAVE S1.4

a) Elementet $f \in \mathbb{R}^S$ er funksjonen

$$f : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

gitt ved

$$f(\text{Tuva}) = -\pi \quad \text{og} \quad f(\text{Solveig}) = 8.$$

b) Uttrykket $2f + 3g \in \mathbb{R}^S$ er funksjonen

$$2f + 3g : S \to \mathbb{R}$$

gitt ved

$$2f + 3g\,(\text{Tuva}) = 2f(\text{Tuva}) + 3g(\text{Tuva})$$
$$= 2\pi + 15$$

og

$$2f + 3g\,(\text{Solveig}) = 2f(\text{Solveig}) + 3g(\text{Solveig})$$
$$= -16 + 3\sqrt{2}$$

OPPGAVE S1.4

c) Funksjonen $\bar{o} : S \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$\bar{o}(\text{Tuva}) = 0 \quad \text{og} \quad \bar{o}(\text{Solveig}) = 0$$

oppfører seg som en nullvektor i $\mathbb{R}^S$.

OPPGAVE S1.6

Mengden V blir ikke et $\mathbb{R}$-vektorrom:

Observér for eksempel at regnereglene gir

$$\left(\underbrace{\infty - \infty}_{=0}\right) + 5 = 0 + 5 = 5$$

og

$$\infty - \left(\underbrace{\infty + 5}_{=\infty}\right) = \infty - \infty = 0$$

Altså har vi et tilfelle hvor

$$(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} \neq \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}),$$

så vektoromsaksiom I holder ikke.