LØSNINGSFORSLAG

PRØVEEKSAMEN I

OPPGAVE 1

a) Usant

b) Usant

c) Usant

d) Sant

OPPGAVE 2

Skal vise: $\bar{u} \in \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) \Rightarrow \{\bar{u}, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ er lineært avhengig.

Ekvivalent: $\{\bar{u}, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ er lineært uavhengig. $\Rightarrow \bar{u} \notin \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$

Så anta at $\{\bar{u}, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ er lineært uavhengig. Hvis $\bar{u} \in \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$, så finnes skalarer $a_1, \dots, a_n$ slik at

$$\bar{u} = a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n .$$

Men da blir $\bar{o} = \bar{u} - (a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n)$ som strider mot antagelsen om linear uavhengighet. Dermed konkluderer vi med at $\bar{u} \notin \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$.

OPPGAVE 3

a) Kjernen til f er definert som

$$\operatorname{Ker} f = \{ \bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = \bar{0}_w \}.$$

b) Skal vise: $\operatorname{Ker} f = \{\bar{0}_v\} \Rightarrow f$ er injektiv.

Ekvivalent: f er ikke injektiv $\Rightarrow \operatorname{Ker} f \neq \{\bar{0}_v\}$

Så anta at f ikke er injektiv. Da finnes $\bar{u}, \bar{v} \in V$ slik at $\bar{u} \overset{(*)}{\neq} \bar{v}$ og $f(\bar{u}) \overset{(**)}{=} f(\bar{v})$.
Siden f er lineær får vi nå

$$f(\bar{u} - \bar{v}) = f(\bar{u}) - f(\bar{v}) \overset{(**)}{=} \bar{0}_w,$$

som betyr at $\bar{u} - \bar{v} \in \operatorname{Ker} f$. Men $\bar{u} - \bar{v} \overset{(*)}{\neq} \bar{0}_v$, og dermed er $\operatorname{Ker} f \neq \{\bar{0}_v\}$.

OPPGAVE 4

a) Det er kjempelett å skrive ned basisbytte-matrisa fra γ til β:

$$M_\gamma^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nå finner vi den basisbyttematrisa som oppgaven spør om (altså fra β til γ):

$$M_\beta^\gamma = \left(M_\gamma^\beta\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}}$$

b) Her er $[\vec{v}]_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, så

$$[\vec{v}]_\gamma = M_\beta^\gamma \cdot [\vec{v}]_\beta = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}}}$$