MA1202/6202

RESTERENDE EKSAMENSOPPGAVER (2023)

(MA1)

Oppgave 6. Det reelle vektorrommet $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ består av alle polynomer av grad høyst 3 med koeffisienter i $\mathbb{R}$. La D være den lineære operatoren på $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ gitt ved derivasjon, altså

$$D(p(x)) = p'(x)$$

for hver $p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

(a) La $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ være standardbasisen for $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Finn matrisa $[D]_\beta$. (Du skal *ikke* vise at β er en basis eller at D er lineær).

(b) Finn dimensjonen til bildet til D, altså tallet $\mathsf{dim}(\mathsf{Im}\, D)$, og finn dimensjonen til kjernen til D, altså tallet $\mathsf{dim}(\mathsf{Ker}\, D)$.

(c) Finnes det en basis γ for $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ som er slik at matrisa $[D]_\gamma$ er inverterbar?

Oppgave 6. Det reelle vektorrommet $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ består av alle polynomer av grad høyst 3 med koeffisienter i $\mathbb{R}$. La D være den lineære operatoren på $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ gitt ved derivasjon, altså

$$D(p(x)) = p'(x)$$

for hver $p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

(a) La $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ være standardbasisen for $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Finn matrisa $[D]_\beta$. (Du skal *ikke* vise at β er en basis eller at D er lineær).

(b) Finn dimensjonen til bildet til D, altså tallet $\dim(\operatorname{Im} D)$, og finn dimensjonen til kjernen til D, altså tallet $\dim(\operatorname{Ker} D)$.

(c) Finnes det en basis γ for $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ som er slik at matrisa $[D]_\gamma$ er inverterbar?

$$\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$$

a) Vi regner ut:

$$D(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$D(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$D(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$D(x^3) = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

Det betyr at

$$[D]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 6. Det reelle vektorrommet $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ består av alle polynomer av grad høyst 3 med koeffisienter i $\mathbb{R}$. La D være den lineære operatoren på $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ gitt ved derivasjon, altså

$$D(p(x)) = p'(x)$$

for hver $p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

(a) La $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ være standardbasisen for $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Finn matrisa $[D]_\beta$. (Du skal *ikke* vise at β er en basis eller at D er lineær).

(b) Finn dimensjonen til bildet til D, altså tallet $\dim(\operatorname{Im} D)$, og finn dimensjonen til kjernen til D, altså tallet $\dim(\operatorname{Ker} D)$.

(c) Finnes det en basis γ for $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ som er slik at matrisa $[D]_\gamma$ er inverterbar?

$$[D]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Dimensjonen til Im D er lik dimensjonen til kolonnerommet til $[D]_\beta$, som er lik rangen til $[D]_\beta$. Altså, $\underline{\underline{\dim(\operatorname{Im} D) = 3}}$

Fundamentalteoremet for lineærtransformasjoner gir nå at

$$\underline{\underline{\dim(\operatorname{Ker} D)}} = \dim(\mathbb{R}[x]_{\leq 3}) - \dim(\operatorname{Im} D)$$
$$= 4 - 3$$
$$\underline{\underline{= 1}}$$

Oppgave 6. Det reelle vektorrommet $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ består av alle polynomer av grad høyst 3 med koeffisienter i $\mathbb{R}$. La D være den lineære operatoren på $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ gitt ved derivasjon, altså

$$D(p(x)) = p'(x)$$

for hver $p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

(a) La $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ være standardbasisen for $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Finn matrisa $[D]_\beta$. (Du skal *ikke* vise at β er en basis eller at D er lineær).

(b) Finn dimensjonen til bildet til D, altså tallet $\dim(\operatorname{Im} D)$, og finn dimensjonen til kjernen til D, altså tallet $\dim(\operatorname{Ker} D)$.

(c) Finnes det en basis γ for $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ som er slik at matrisa $[D]_\gamma$ er inverterbar?

c) Hvis $\gamma \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ er en basis slik at $[D]_\gamma$ er inverterbar, så må D være en isomorfi. Men D er ikke surjektiv (ei heller injektiv), så D er ikke en isomorfi.

Altså, <u>en slik basis γ finnes ikke.</u>

(MA1)

Oppgave 7. For en lineær operator f på et vektorrom V skriver vi

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ kopier av } f}$$

og sier at f er *nilpotent* hvis det finnes et naturlig tall $n \geq 1$ slik at $f^n = \mathcal{O}$. (Her står $\mathcal{O}$ for nulloperatoren på V, det vil si at $\mathcal{O}(\bar{v}) = \bar{0}$ for hver $\bar{v} \in V$.)

(a) Gi et eksempel på et vektorrom V med en nilpotent lineær operator $f \neq \mathcal{O}$.

Nå lar vi V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{C}$.

(b) Vis at hvis f er nilpotent så er hver egenverdi for f lik 0.

(c) Vis at hvis f er nilpotent og normal, så er $f = \mathcal{O}$.

Vink: Her kan du bruke resultatet fra (b) selv om du ikke har løst oppgaven.

Oppgave 7. For en lineær operator f på et vektorrom V skriver vi

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ kopier av } f}$$

og sier at f er *nilpotent* hvis det finnes et naturlig tall $n \geq 1$ slik at $f^n = \mathbb{O}$. (Her står $\mathbb{O}$ for nulloperatoren på V, det vil si at $\mathbb{O}(\bar{v}) = \bar{0}$ for hver $\bar{v} \in V$.)

(a) Gi et eksempel på et vektorrom V med en nilpotent lineær operator $f \neq \mathbb{O}$.

Nå lar vi V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{C}$.

(b) Vis at hvis f er nilpotent så er hver egenverdi for f lik 0.

(c) Vis at hvis f er nilpotent og normal, så er $f = \mathbb{O}$.
Vink: Her kan du bruke resultatet fra (b) selv om du ikke har løst oppgaven.

a) Et eksempel er $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$f(x, y) = (y, 0).$$

Oppgave 7. For en lineær operator f på et vektorrom V skriver vi

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ kopier av } f}$$

og sier at f er *nilpotent* hvis det finnes et naturlig tall $n \geq 1$ slik at $f^n = \mathbb{O}$. (Her står $\mathbb{O}$ for nulloperatoren på V, det vil si at $\mathbb{O}(\bar{v}) = \bar{0}$ for hver $\bar{v} \in V$.)

(a) Gi et eksempel på et vektorrom V med en nilpotent lineær operator $f \neq \mathbb{O}$.

Nå lar vi V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{C}$.

(b) Vis at hvis f er nilpotent så er hver egenverdi for f lik 0.

(c) Vis at hvis f er nilpotent og normal, så er $f = \mathbb{O}$.
Vink: Her kan du bruke resultatet fra (b) selv om du ikke har løst oppgaven.

b) Anta at f er nilpotent, så $f^n \overset{(*)}{=} \mathbb{O}$.
La $\lambda \in \mathbb{C}$ være en egenverdi for f.
Skal vise: $\lambda = 0$.

La $\bar{v} \in V$ være en egenvektor tilhørende λ. Da er $\bar{v} \neq \bar{0}$ og $f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$. Dermed blir

$$f^2(\bar{v}) = f(f(\bar{v})) = f(\lambda \bar{v}) = \lambda f(\bar{v}) = \lambda^2 \bar{v},$$

og det følger at $f^i(\bar{v}) = \lambda^i \bar{v} \quad \forall \; i \geq 1$. Men da må $\lambda^n \bar{v} = f^n(\bar{v}) \overset{(*)}{=} \mathbb{O}(\bar{v}) = \bar{0}$ som impliserer $\lambda = 0$ (husk at $\bar{v} \neq \bar{0}$). $\square$

Oppgave 7. For en lineær operator f på et vektorrom V skriver vi

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ kopier av } f}$$

og sier at f er *nilpotent* hvis det finnes et naturlig tall $n \geq 1$ slik at $f^n = \mathbb{O}$. (Her står $\mathbb{O}$ for nulloperatoren på V, det vil si at $\mathbb{O}(\bar{v}) = \bar{0}$ for hver $\bar{v} \in V$.)

(a) Gi et eksempel på et vektorrom V med en nilpotent lineær operator $f \neq \mathbb{O}$.

Nå lar vi V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{C}$.

(b) Vis at hvis f er nilpotent så er hver egenverdi for f lik 0.

(c) Vis at hvis f er nilpotent og normal, så er $f = \mathbb{O}$.
Vink: Her kan du bruke resultatet fra (b) selv om du ikke har løst oppgaven.

c) Anta at f er nilpotent og normal

Skal vise: $f = \mathbb{O}$.

SPEKTRALTEOREM FOR $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ gir at det finnes en (ortonormal) basis β for V slik at $[f]_\beta$ er diagonal. Da er hver $\lambda \in \mathbb{C}$ som opptrer på hoveddiagonalen til $[f]_\beta$, en egenverdi for f. Oppgave b) avslører at hver slik λ er lik null, så $[f]_\beta$ er nullmatrisa. Det betyr at

$f = \mathbb{O}$.

$\square$

(AUGUST)

Oppgave 3. I denne oppgaven er V det reelle vektorrommet som består av alle funksjoner $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Bestem hvorvidt de følgende delmengdene av V er underrom.

- $U = \{f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = f(1)\} \subset V$ og
- $W = \{f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = f(1) + 2\} \subset V$.

Oppgave 3. I denne oppgaven er V det reelle vektorrommet som består av alle funksjoner $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Bestem hvorvidt de følgende delmengdene av V er underrom.

- $U = \{f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = f(1)\} \subset V$ og
- $W = \{f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = f(1) + 2\} \subset V$.

Husk: Nullvektoren i V er funksjonen $\text{null}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $\text{null}(x) = 0 \quad \forall \; x \in \mathbb{R}$.

- i) Vi har $\text{null} \in U$. (Fordi $\text{null}(0) = 0 = \text{null}(1)$)

ii) For $f, g \overset{(*)}{\in} U$ er også $f+g \in U$
(Fordi $(f+g)(0) \overset{\text{DEF}}{=} f(0) + g(0) \underset{(*)}{=} f(1) + g(1) \overset{\text{DEF}}{=} (f+g)(1)$)

iii) For $f \overset{(**)}{\in} U$ og $\lambda \in \mathbb{R}$ er også $\lambda f \in U$
[Fordi $(\lambda f)(0) \overset{\text{DEF}}{=} \lambda f(0) \underset{(**)}{=} \lambda f(1) \overset{\text{DEF}}{=} (\lambda f)(1)$]

Dette viser at $U \subset V$ er et underrom.

Oppgave 3. I denne oppgaven er V det reelle vektorrommet som består av alle funksjoner $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Bestem hvorvidt de følgende delmengdene av V er underrom.

- $U = \{f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = f(1)\} \subset V$ og
- $W = \{f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = f(1) + 2\} \subset V$.

Husk: Nullvektoren i V er funksjonen $\text{null}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $\text{null}(x) = 0 \quad \forall \; x \in \mathbb{R}$.

- Vi har

$$\text{null}(0) = 0 \neq 2 = \text{null}(1) + 2,$$

altså

$$\text{null} \notin W,$$

som betyr at $\underline{\underline{W \subset V \text{ ikke er et underrom.}}}$

(AUGUST)

Oppgave 6. I denne oppgaven står $\mathcal{O}$ for nulloperatoren på V, det vil si at

$$\mathcal{O}(\bar{v}) = \bar{0} \text{ for hver } \bar{v} \in V.$$

(a) Gi et eksempel på et vektorrom V med en lineær operator f som er slik at

$$f \circ f = \mathcal{O} \text{ og } f \neq \mathcal{O}.$$

(b) La nå V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom med en selv-adjungert lineær operator f.

Vis at hvis $f \circ f = \mathcal{O}$ så er $f = \mathcal{O}$.

Oppgave 6. I denne oppgaven står $\mathcal{O}$ for nulloperatoren på V, det vil si at

$$\mathcal{O}(\bar{v}) = \bar{0} \text{ for hver } \bar{v} \in V.$$

(a) Gi et eksempel på et vektorrom V med en lineær operator f som er slik at

$$f \circ f = \mathcal{O} \text{ og } f \neq \mathcal{O}.$$

(b) La nå V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom med en selv-adjungert lineær operator f.

Vis at hvis $f \circ f = \mathcal{O}$ så er $f = \mathcal{O}$.

a) Et eksempel er $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$f(x, y) = (y, 0).$$

Oppgave 6. I denne oppgaven står $\mathcal{O}$ for nulloperatoren på V, det vil si at

$$\mathcal{O}(\bar{v}) = \bar{0} \text{ for hver } \bar{v} \in V.$$

(a) Gi et eksempel på et vektorrom V med en lineær operator f som er slik at

$$f \circ f = \mathcal{O} \text{ og } f \neq \mathcal{O}.$$

(b) La nå V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom med en selv-adjungert lineær operator f.

Vis at hvis $f \circ f = \mathcal{O}$ så er $f = \mathcal{O}$.

b) La f være selvadjungert.

Skal vise: $f \circ f = \mathcal{O} \Rightarrow f = \mathcal{O}$

Anta at $f \circ f = \mathcal{O}$. La $\bar{v} \in V$. Da er

$$\begin{aligned} 0 = \langle \bar{0}, \bar{v} \rangle &= \langle (f \circ f)(\bar{v}), \bar{v} \rangle \\ &= \langle f(f(\bar{v})), \bar{v} \rangle \\ &\overset{\text{DEFINISJON AV } f^*}{=} \langle f(\bar{v}), f^*(\bar{v}) \rangle \\ &= \langle f(\bar{v}), f(\bar{v}) \rangle = \| f(\bar{v}) \|^2. \end{aligned}$$

Dette impliserer $f(\bar{v}) = \bar{0} \;\; \forall \, \bar{v} \in V$, i.e. $f = \mathcal{O}$. $\square$

(AUGUST)

Oppgave 7. I denne oppgaven er $n \geq 1$ et naturlig tall, V er det reelle vektorrommet av alle $n \times n$–matriser over $\mathbb{R}$ og $D \in V$ er ei fiksert matrise.

La funksjonen $\delta\colon V \longrightarrow V$ være gitt ved

$$\delta(A) = A \cdot D - D \cdot A$$

for hver $A \in V$ (her betyr $\cdot$ matrisemultiplikasjon).

(a) Vis at δ er en lineærtransformasjon.

(b) Hva er determinanten til δ?

Oppgave 7. I denne oppgaven er $n \geq 1$ et naturlig tall, V er det reelle vektorrommet av alle $n \times n$–matriser over $\mathbb{R}$ og $D \in V$ er ei fiksert matrise.

La funksjonen $\delta \colon V \longrightarrow V$ være gitt ved

$$\delta(A) = A \cdot D - D \cdot A$$

for hver $A \in V$ (her betyr $\cdot$ matrisemultiplikasjon).

(a) Vis at δ er en lineærtransformasjon.

(b) Hva er determinanten til δ?

a) For $A, B \in V$ har vi

$$\begin{aligned} \delta(A+B) &= (A+B)D - D(A+B) \\ &= AD + BD - DA - DB \\ &= AD - DA + BD - DB = \delta(A) + \delta(B). \end{aligned}$$

For $A \in V$ og $\lambda \in \mathbb{R}$ har vi

$$\begin{aligned} \delta(\lambda A) &= (\lambda A)D - D(\lambda A) \\ &= \lambda AD - \lambda DA \\ &= \lambda(AD - DA) = \lambda\, \delta(A). \end{aligned}$$

Dette viser at δ er en lineærtransformasjon. $\square$

Oppgave 7. I denne oppgaven er $n \geq 1$ et naturlig tall, V er det reelle vektorrommet av alle $n \times n$–matriser over $\mathbb{R}$ og $D \in V$ er ei fiksert matrise.

La funksjonen $\delta \colon V \longrightarrow V$ være gitt ved

$$\delta(A) = A \cdot D - D \cdot A$$

for hver $A \in V$ (her betyr $\cdot$ matrisemultiplikasjon).

(a) Vis at δ er en lineærtransformasjon.

(b) Hva er determinanten til δ?

b) Determinanten til δ er determinanten til matrisa $[\delta]_\beta$ hvor β er en vilkårlig basis for V.

Så la $\beta \subset V$ være en basis. Hvis $I \in V$ er identitetsmatrisa, så må koordinatvektoren $[I]_\beta \in \mathbb{R}^{n^2}$ være ikke-null. Men

$$\delta(I) = ID - DI = D - D = \text{null-matrisa}.$$

Det betyr at

$$[\delta]_\beta \cdot [I]_\beta = [\delta(I)]_\beta = [\text{null-matrisa}]_\beta = \bar{0} \in \mathbb{R}^n$$

Altså inneholder nullrommet til matrisa $[\delta]_\beta$ vektoren $[I]_\beta \neq \bar{0}$, så determinanten til $[\delta]_\beta$ er lik null.

Altså, $\det(\delta) = 0$.