MA1202 PÅ 1-2-3

OPPSUMMERINGSFORELESNING

I Vektorrom

II Lineærtransformasjoner

III Indreproduktrom

IV Operatorer på indreproduktrom

O Anvendelser

o ANVENDELSER

- Homogene lineære differensialligninger m/konstante koeffisienter

1) Skriv ned polynomet som hører til den aktuelle differensialligninga.

2) Skriv polynomet som et produkt av lineære faktorer (alltid mulig over $\mathbb{C}$)

3) Les av en basis for løsningsrommet til differensialligninga (enhver løsning av differensialligninga er en lineærkombinasjon av funksjonene i denne basisen).

0 ANVENDELSER

- Systemer av lineære differensialligninger

1) Skriv systemet på matriseform $A\bar{y} = \bar{y}'$

2) Diagonalisér A $(Q^{-1}AQ = D)$

3) Gjør variabelbyttet $\bar{u} = Q^{-1}\bar{y}$

4) Løs systemet $\bar{u}' = D\bar{u}$ (barneskirenn!)

5) Finn tilbake til $\bar{y} = Q\bar{u}$

0 ANVENDELSER

- Markov-kjeder

MÅL: Finn den stabile tilstandsvektoren $\bar{q}$

1) Identifisér overgangsmatrisa P (stokastisk)

- P regulær $\overset{!}{\Rightarrow} \lim\limits_{i \to \infty} P^i = (\bar{q} \mid \bar{q} \mid \dots \mid \bar{q})$

$$\Rightarrow \lim_{i \to \infty} P^i \bar{x} = \bar{q} \quad \forall \text{ sannsynlighetsvektor } \bar{x}$$

- $\bar{q}$ er den entydige sannsynlighetsvektoren som er slik at $P\bar{q} = \bar{q}$ ($\bar{q}$ er en egenvektor for P tilhørende egenverdien 1).

0 ANVENDELSER

- Fourier-rekker

Gitt kontinuerlige funksjoner

$$f, h_1, \dots, h_m : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Den lineærkombinasjonen $a_1 h_1 + \dots + a_m h_m$ som gjør "avviket"

$$\int_a^b |f(x) - (a_1 h_1(x) + \dots + a_m h_m(x))|^2 dx$$

så lite som mulig, er den ortogonale projeksjonen

$$P_U(f) = \langle f, g_1 \rangle g_1 + \dots + \langle f, g_n \rangle g_n$$

hvor $\{g_1, \dots, g_n\}$ er en ortonormal basis for underrommet $U = \text{span}(h_1, \dots, h_m)$ av indreproduktrommet av kontinuerlige funksjoner $[a,b] \to \mathbb{R}$ med $\langle \phi, \psi \rangle = \int_a^b \phi(x)\psi(x)\,dx$.

I Vektorrom

- F en kropp (e.g. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$), S en mengde
  $\leadsto$ vektorrommet $F^S = \{$ funksjoner $\phi : S \to F \}$
  - $(\phi + \psi)(s) := \phi(s) + \psi(s)$ sum : F
  - $(\lambda \phi)(s) := \lambda \phi(s)$ produkt : F
  - → Dekker alle eksemplene fra MA1201 ($\mathbb{R}^n$)
  - → Gir mange nye vektorrom!
    - → Polynomer ($F[x]$ og $F[x]_{\leq n}$)
    - → Rom av [spesielle] funksjoner

- Underrom
  - → Kriterium for underrom ("$\bar{0}$, $+$ og $\cdot$")
  - → Underrom utspent/generert av en delmengde ("span")

I VEKTORROM

- Endeligdimensjonale vektorrom [$V = \mathrm{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_t)$]
  - $\hookrightarrow$ V endeligdimensjonalt og $U \subset V \overset{*}{\Rightarrow} U$ endeligdimensjonalt

- Basis $\beta \subset V$ [β lineært uavhengig & $\mathrm{span}(\beta) = V$]
  - $\rightarrow$ $\dim V :=$ antallet vektorer i enhver(!) basis for V

    ($\dim \mathbb{R}^n = n$; $\dim \mathbb{R}[x]_{\leq n} = n+1$;
    $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$; $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$.)
  - $\rightarrow$ $U \subset V \Rightarrow \dim U \overset{*}{\leq} \dim V$
  - $\rightarrow$ $\alpha \subset V$ lineært uavhengig

    $\Rightarrow$ α kan utvides til en basis for V
  - $\rightarrow$ $\mathrm{span}(\gamma) = V$

    $\Rightarrow$ γ inneholder en basis for V

I VEKTORROM

- NB! Mange vektorrom er uendeligdimensjonale !
  ($\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}^{[0,1]}$, ...)

II LINEÆRTRANSFORMASJONER

Vektorrom over den samme kroppen!

- Funksjoner $f : V \longrightarrow W$ som oppfyller

  $f(\bar{u}+\bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v})$ & $f(\lambda\bar{u}) = \lambda f(\bar{u})$

  sum i V — sum i W — skalarmult. i V — skalarmult. i W

  → "Lineær utvidelse"

  → $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subset V$ en basis, $\phi : \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \longrightarrow W$ en funksjon

  $\Rightarrow \exists!$ lineærtransformasjon $f : V \longrightarrow W$

  slik at $f(\bar{v}_i) = \phi(\bar{v}_i) \quad \forall \; 1 \leq i \leq n$

  [Nemlig $f(a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n) = a_1\phi(\bar{v}_1) + \dots + a_n\phi(\bar{v}_n)$]

- $\mathrm{Hom}_F(V, W) = \{$ lineærtransformasjoner $f : V \longrightarrow W \}$

  → Et vektorrom over F! (underrom av W^V)

  → $\dim \mathrm{Hom}_F(V, W) = \dim V \cdot \dim W$

II LINEÆRTRANSFORMASJONER

- Underrommene kjernen og bildet til $f: V \to W$
  - Nullrom
    $\text{Ker } f = \{ \bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = \bar{0} \} \subset V$
  - $\text{Im } f = \{ f(\bar{v}) \mid \bar{v} \in V \} \subset W$
    Kolonnerom
  - f injektiv $\iff$ $\text{Ker } f = \{\bar{0}\}$
  - f surjektiv $\iff$ $\text{Im } f = W$

- Rang-nullitet-teoremet
  Fundamentalteoremet: $\dim V = \dim \text{Ker} f + \dim \text{Im } f$.

- Isomorfi [hvis $\exists$ lineær $f^{-1}: W \to V$ s.a. $f \circ f^{-1} = id_W$ og $f^{-1} \circ f = id_V$]
  - f isomorfi $\iff$ f injektiv og surjektiv
  - $\dim V = \dim W \implies V \cong W$ (e.g. $\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}[x]_{\leq n}$)

II LINEÆRTRANSFORMASJONER

- Konkretisering
  - Koordinatvektor [mhp. ordna basis $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ for V]
    - $\bar{v} \in V \Rightarrow \bar{v} = a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n \rightsquigarrow [\bar{v}]_\beta = (a_1 \dots a_n)^T \in F^n$
      - Gir en isomorfi $[-]_\beta : V \longrightarrow F^n$.
  - Matriserepresentasjon [av lin. transf. $f: V \longrightarrow W$] (m/ ordna basis γ)
    - Matrisa $[f]_\beta^\gamma$ (med kolonne nr j = $[f(\bar{v}_j)]_\gamma$)
      - Gir en isomorfi

        $[-]_\beta^\gamma : \text{Hom}_F(V, W) \longrightarrow M_{\dim W, \dim V}(F)$
      - $[f \circ g]_\alpha^\gamma = [f]_\beta^\gamma \cdot [g]_\alpha^\beta$ (Matriseprodukt)

        Gitt $g: U \to V$ og ordna basis $\alpha \subset U$

        - $[f(\bar{v})]_\gamma = [f]_\beta^\gamma \cdot [\bar{v}]_\beta$
        - f inverterbar $\Rightarrow [f^{-1}]_\gamma^\beta = ([f]_\beta^\gamma)^{-1}$ (Matriseinvers)

II LINEÆRTRANSFORMASJONER

- Diagonalisering av $f: V \to V$ [basis $\beta \subset V$ s.a. $[f]_\beta$ diagonal]
  - Egenverdi
    - Eksisterer alltid når $F = \mathbb{C}$ og $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$
      $\Rightarrow$ $\exists$ basis $\beta' \subset V$ s.a. $[f]_{\beta'}$ øvre triangulær
    - Karakteristisk polynom [røtter = egenverdier]
  - Egenvektor [$\bar{v} \neq \bar{0}$ s.a. $f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$, $\lambda \in F$]
    - f diagonaliserbar $\Leftrightarrow$ $\exists$ basis $\beta \subset V$ av egenvektorer for f.
      - $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ en slik basis med $f(\bar{v}_i) = \lambda_i \bar{v}_i$
        $\Rightarrow$ $[f]_\beta$ har λ_i på plass i på diagonalen
  - ⋮

II LINEÆRTRANSFORMASJONER

- Diagonalisering av $f : V \to V$ [basis $\beta \subset V$ s.a. $[f]_\beta$ diagonal]
  - Diagonalisering av matrise A [Q s.a. $Q^{-1}AQ$ diagonal]
    - Kolonnene i Q danner en basis av egenvektorer for A
  - Egenrom [λ egenverdi $\rightsquigarrow$ $E_\lambda = \{ \bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \}$]
    - $\dim E_\lambda \leq m(\lambda)$

      Geometrisk multiplisitet

      Algebraisk multiplisitet
    - f diagonaliserbar

      $\Longleftrightarrow$

      $\dim E_{\lambda_i} = m(\lambda_i) \quad \forall i$

      $\Longleftrightarrow$

      $\dim E_{\lambda_1} + \ldots + \dim E_{\lambda_m} = \dim V$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ er de distinkte egenverdiene til f

II LINEÆRTRANSFORMASJONER

- Cayley–Hamilton-teoremet [$\text{charpol}_f(f) = 0$]
  - → Invariante underrom [$U \subset V$ s.a. $f(\bar{u}) \in U \;\forall\, \bar{u} \in U$]
    - → Operatoren $f|_U : U \to U$

III INDREPRODUKTROM

NÅ : $F = \mathbb{R}$ ELLER $F = \mathbb{C}$

- Indreprodukt [Funksjon $\langle -,- \rangle : V \times V \to F$ som oppfyller visse aksiomer]
  - Norm [$\|\bar{v}\| = \sqrt{\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle}$]
  - Ortogonalitet [$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0$]
    - Ortogonalt komplement [$U^{\perp} = \{ \bar{v} \in V \mid \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0 \ \forall \bar{u} \in U \}$]
  - Fundamentale egenskaper
    - $\langle -, \bar{v} \rangle : V \to F$ er linear $\forall \ \bar{v} \in V$; ...
    - $\{\bar{0}\}^{\perp} = V$; $V^{\perp} = \{\bar{0}\}$; ...
  - Større (fundamentale) resultater
    - Pythagoras [$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0 \Rightarrow \|\bar{u} + \bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2$]
    - Cauchy–Schwartz-uliketheten [$|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle| \leq \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|$]
    - Trekantuliketheten [$\|\bar{u} + \bar{v}\| \leq \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$]

III INDREPRODUKTROM

- Ortonormal basis [basis $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ med $\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = \delta_{ij}$]

  (Ortogonalitet $\Rightarrow$ lineær uavhengighet !)

  $\to$ $\bar{v} = \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \dots + \langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle \bar{e}_n \quad \forall\ \bar{v} \in V$!

  $\to$ Gram-Schmidt-prosessen

  - Input: lineært uavhengig mengde $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\}$
  - Output: ortonormal mengde $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$

    med $\operatorname{span}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m) = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, v_m)$

    $\to$ Enhver ortonormal mengde kan utvides til en ortonormal basis ($\dim V < \infty$)

III INDREPRODUKTROM

- Ortogonal projeksjon $P_U : V \to V$

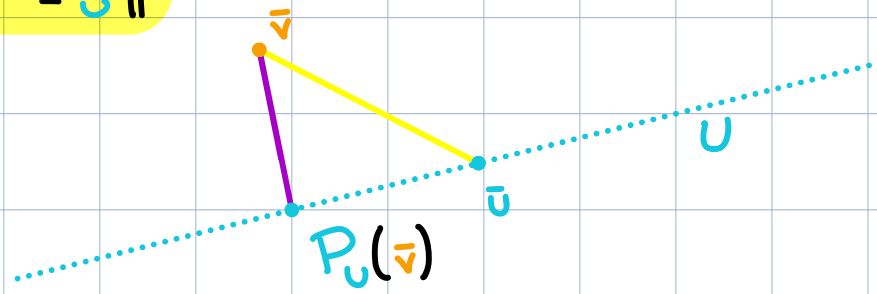
  $\left(\begin{array}{l} U \subset V \text{ endeligdimensjonalt underrom}, \ \bar{v} \in V \\ \Rightarrow \quad \bar{v} = \underbrace{\bar{u}}_{=: P_U(\bar{v})} + \bar{w} \quad \text{for entydige } \bar{u} \in U, \ \bar{w} \in U^{\perp} \end{array} \right)$

  → $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ ortonormal basis for U

  $\Rightarrow P_U(\bar{v}) = \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \dots + \langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle \bar{e}_n$

  → For hver $\bar{v} \in V$ og $\bar{u} \in U$ er

  $$\| \bar{v} - P_U(\bar{v}) \| \leq \| \bar{v} - \bar{u} \|$$



III INDREPRODUKTROM

- Funksjonaler [lineærtransformasjoner $V \longrightarrow F$]
  - $\langle -, \bar{v} \rangle : V \longrightarrow F$ er en funksjonal $\forall \bar{v} \in V$
  - ENHVER funksjonal er av typen $\langle -, \bar{v} \rangle$.

IV OPERATORER PÅ INDREPRODUKTROM

- Den adjungerte til $f : V \longrightarrow W$

  [$f^* : W \longrightarrow V$ slik at

  $\langle f(\bar{v}), \bar{w} \rangle = \langle \bar{v}, f^*(\bar{w}) \rangle \quad \forall \bar{v} \in V, \bar{w} \in W$]

  $\longrightarrow$ $\beta \subset V$ og $\gamma \subset W$ ortonormale basiser

  $$\Rightarrow \quad [f^*]_\gamma^\beta = \left([f]_\beta^\gamma \right)^*$$

  Konjugerttransponert matrise!

IV OPERATORER PÅ INDREPRODUKTROM

$$f : V \longrightarrow V$$

- f bevarer indreprodukt $\iff$ $f^* = f^{-1}$
  - → f kalles ortogonal når $F = \mathbb{R}$
  - → f kalles unitær når $F = \mathbb{C}$

IV OPERATORER PÅ INDREPRODUKTROM $f: V \longrightarrow V$

- Normale operatorer $[\, f \circ f^* = f^* \circ f \,]$
  - $\rightarrow$ f selvadjungert (i.e. $f = f^*$) $\Rightarrow$ f normal
  - $\rightarrow$ f normal $\Rightarrow$ distinkte egenverdier har ortogonale egenvektorer

IV OPERATORER PÅ INDREPRODUKTROM $f: V \longrightarrow V$

- Spektralteorem for $F = \mathbb{R}$:

  $\exists$ ortonormal basis $\beta \subset V$ s.a. $[f]_\beta$ er diagonal

  $\Longleftrightarrow$

  f selvadjungert

- Spektralteorem for $F = \mathbb{C}$:

  $\exists$ ortonormal basis $\beta \subset V$ s.a. $[f]_\beta$ er diagonal

  $\Longleftrightarrow$

  f normal

IV OPERATORER PÅ INDREPRODUKTROM

- Ortogonal og unitær diagonalisering [A ei matrise]
  - $F = \mathbb{R}$: A ortogonalt diagonaliserbar <=> A symmetrisk ($A = A^* = A^T$)
  - $F = \mathbb{C}$: A unitært diagonaliserbar <=> A normal ($AA^* = A^*A$)
  - Oppskrift [hvis A ortogonalt/unitært diagonaliserbar]
    1) Finner basis for hvert egenrom
    2) GS ⇝ får ortonormal basis for hvert egenrom
    3) La P bestå av de ortonormale basisvektorene
       → P er ortogonal/unitær og $P^{-1}AP$ er diagonal!