Oppgave 4. Vi ser på den lineære operatoren $f\colon F^2 \longrightarrow F^2$ gitt ved

$$f(x, y) = (2x - 3y, 3x + 2y).$$

(a) La $F = \mathbb{R}$. Finnes det en ortonormal basis β for $\mathbb{R}^2$ (med det euklidske indreproduktet) som er slik at $[f]_\beta$ er diagonal? Finn i så fall en slik β.

(b) La $F = \mathbb{C}$. Finnes det en ortonormal basis γ for $\mathbb{C}^2$ (med det euklidske indreproduktet) som er slik at $[f]_\gamma$ er diagonal? Finn i så fall en slik γ.

(a) La $F = \mathbb{R}$. Finnes det en ortonormal basis β for $\mathbb{R}^2$ (med det euklidske indreproduktet) som er slik at $[f]_\beta$ er diagonal? Finn i så fall en slik β.

Vi ser på $f : F^2 \longrightarrow F^2$ gitt ved
$f(x, y) = (2x - 3y, 3x + 2y)$.

a) La $F = \mathbb{R}$.

Vi har $f = L_X$ for matrisa $X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
Siden X ikke er symmetrisk er f ikke selvadjungert (FINT FAKTUM II, FORELESNING 23V).

Ved SPEKTRALTEOREM FOR $F = \mathbb{R}$ betyr dette at det ikke finnes noen ortonormal basis β for $\mathbb{R}^2$ som er slik at $[f]_\beta$ er diagonal.

(b) La $F = \mathbb{C}$. Finnes det en ortonormal basis γ for $\mathbb{C}^2$ (med det euklidske indreproduktet) som er slik at $[f]_\gamma$ er diagonal? Finn i så fall en slik γ.

Vi ser på $f : F^2 \longrightarrow F^2$ gitt ved
$f(x, y) = (2x - 3y \,,\, 3x + 2y)$.

b) La $F = \mathbb{C}$.

Vi har $f = L_X$ for matrisa $X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
Siden X er normal ($XX^* = X^*X = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$) er også
f normal (FINT FAKTUM II, FORELESNING 23V).

Ved SPEKTRALTEOREM FOR $F = \mathbb{C}$ betyr dette at
det finnes en ortonormal basis for $\mathbb{C}^2$ som
er slik at $[f]_\gamma$ er diagonal.

(b) La $F = \mathbb{C}$. Finnes det en ortonormal basis γ for $\mathbb{C}^2$ (med det euklidske indreproduktet) som er slik at $[f]_\gamma$ er diagonal? Finn i så fall en slik γ.

Vi ser på $f : F^2 \longrightarrow F^2$ gitt ved
$f(x, y) = (2x - 3y, 3x + 2y)$.

b) For eksempel er den ortonormale basisen

$$\gamma = \left\{ \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\} \subset \mathbb{C}^2$$

slik at $[f]_\gamma$ er diagonal $\left([f]_\gamma = \begin{pmatrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 2-3i \end{pmatrix} \right)$.

Oppgave 5. La f være en lineær operator på $\mathbb{R}^3$ slik at matrisa $[f]_\beta$ er øvre triangulær, hvor

$$\beta = \{(1,\,0,\,0),\ (1,\,1,\,1),\ (1,\,1,\,2)\}.$$

Finn en ortonormal basis β' for $\mathbb{R}^3$ (med det euklidske indreproduktet) som er slik at matrisa $[f]_{\beta'}$ er øvre triangulær.

Oppgave 5. La f være en lineær operator på $\mathbb{R}^3$ slik at matrisa $[f]_\beta$ er øvre triangulær, hvor
$$\beta = \{(1, 0, 0),\ (1, 1, 1),\ (1, 1, 2)\}.$$
Finn en ortonormal basis β' for $\mathbb{R}^3$ (med det euklidske indreproduktet) som er slik at matrisa $[f]_{\beta'}$ er øvre triangulær.

Vi har $\beta = \{(1,0,0), (1,1,1), (1,1,2)\}$. Hvis vi bruker Gram-Schmidt-prosessen på β får vi

$$\beta' = \left\{(1,0,0),\ \left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\},$$

som er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$.

Siden matrisa $[f]_\beta$ er øvre triangulær, er også matrisa $[f]_{\beta'}$ øvre triangulær (dette følger av BEVIS for LEMMA fra FORELESNING 24VA).

Oppgave 6. La f være en normal lineær operator på et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{C}$. Vis at

$$f \text{ er selvadjungert} \iff f \text{ har kun reelle egenverdier.}$$

Oppgave 6. La f være en normal lineær operator på et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{C}$. Vis at

$$f \text{ er selvadjungert} \iff f \text{ har kun reelle egenverdier.}$$

La $f: V \to V$ være normal.

Skal vise: f selvadjungert $\Leftrightarrow$ f har kun reelle egenverdier

$\Rightarrow$: Dette viste vi: S23.6 a).

$\Leftarrow$: Siden f er normal gir SPEKTRALTEOREM FOR $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ at det finnes en ortonormal basis β for V (β består av egenvektorer for f) slik at $[f]_\beta$ er diagonal. Matrisa $[f]_\beta$ har egenverdiene til f på diagonalen, så dersom disse er reelle blir

$$[f^*]_\beta = ([f]_\beta)^* = ([f]_\beta)^T = [f]_\beta,$$

og dette betyr at $f^* = f$.

Oppgave 7. La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{C}$.

Vis at enhver normal operator på V har ei kvadratrot.
(En operator r på V kalles ei *kvadratrot* av en operator f på V hvis $r^2 = f$.)

Oppgave 7. La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{C}$.

Vis at enhver normal operator på V har ei kvadratrot.
(En operator r på V kalles ei *kvadratrot* av en operator f på V hvis $r^2 = f$.)

La $f: V \to V$ være normal.

Skal vise: Det finnes en lineær operator r på V som er slik at $r^2 = f$.

Siden f er normal har V en ortonormal basis $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ som består av egenvektorer for f (SPEKTRALTEOREM FOR $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). For $1 \le i \le n$, la $\lambda_i \in \mathbb{C}$ være slik at $f(\bar{e}_i) \overset{(*)}{=} \lambda_i \bar{e}_i$ og velg en $\sqrt{\lambda_i}$.

Definér

$$r: V \to V \quad \text{ved} \quad r(\bar{e}_i) = \sqrt{\lambda_i}\, \bar{e}_i \quad \forall\ 1 \le i \le n$$

(HUSK TEOREM FORELESNING 5V).

Oppgave 7. La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{C}$.

Vis at enhver normal operator på V har ei kvadratrot.
(En operator r på V kalles ei *kvadratrot* av en operator f på V hvis $r^2 = f$.)

For hver $\bar{v} \in V$ er $\bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$, så

$$
\begin{aligned}
r^2(\bar{v}) &= r(r(\bar{v})) \\
&= r(r(\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n)) \\
&= r(\alpha_1 \sqrt{\lambda_1}\, \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \sqrt{\lambda_n}\, \bar{e}_n) \\
&= \alpha_1 \lambda_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n \bar{e}_n \\
&\overset{(*)}{=} \alpha_1 f(\bar{e}_1) + \dots + \alpha_n f(\bar{e}_n) \\
&= f(\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n) = f(\bar{v}),
\end{aligned}
$$

DEFINISJONEN AV r

som viser at $r^2 = f$.

Oppgave 10. La V være et endeligdimensjonalt vektorrom over $\mathbb{R}$ med en lineær operator f.

Vis at V har en basis av egenvektorer for f hvis og bare hvis det finnes et indreprodukt på V som gjør f til en selvadjungert operator.

Oppgave 10. La V være et endeligdimensjonalt vektorrom over $\mathbb{R}$ med en lineær operator f.

Vis at V har en basis av egenvektorer for f hvis og bare hvis det finnes et indreprodukt på V som gjør f til en selvadjungert operator.

Skal vise: V har en basis av egenvektorer for f

$\Leftrightarrow$

Det finnes et indreprodukt på V som gjør f til en selvadjungert operator

$\Leftarrow$: Dette følger fra SPEKTRALTEOREM FOR $F = \mathbb{R}$.

Oppgave 10. La V være et endeligdimensjonalt vektorrom over $\mathbb{R}$ med en lineær operator f.

Vis at V har en basis av egenvektorer for f hvis og bare hvis det finnes et indreprodukt på V som gjør f til en selvadjungert operator.

Skal vise: V har en basis av egenvektorer for f

$\Leftrightarrow$

Det finnes et indreprodukt på V som gjør f til en selvadjungert operator

$\Rightarrow$: Anta at $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ er en basis for V hvor hver $\bar{v}_i$ er en egenvektor for f.
Definér en funksjon $\langle -, - \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ ved

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{v}_i \,,\, \sum_{i=1}^{n} \beta_i \bar{v}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \,.$$

Da er $\langle -, - \rangle$ et indreprodukt på V (sjekk selv)
som er slik at f blir selvadjungert (sjekk selv).