Oppgave 4. La A være ei øvre triangulær matrise. Vis at

$$A \text{ er normal hvis og bare hvis } A \text{ er diagonal.}$$

Oppgave 4. La A være ei øvre triangulær matrise. Vis at

$$A \text{ er normal hvis og bare hvis } A \text{ er diagonal.}$$

La A være øvre triangulær, så $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Skal vise: A er normal $\Leftrightarrow$ A er diagonal

$\Leftarrow$: Hvis A er diagonal, så er også A^* diagonal. Dermed blir $AA^* = A^*A$ (diagonale matriser er kommuterer), så A er normal.

Oppgave 4. La A være ei øvre triangulær matrise. Vis at

$$A \text{ er normal hvis og bare hvis } A \text{ er diagonal.}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$: Anta at A er normal, altså at $A^*A = AA^*$.

Spesielt er

$$|a_{11}|^2 = (A^*A)_{1,1} = (AA^*)_{1,1} = |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \ldots + |a_{1n}|^2,$$

som impliserer $a_{12} = \ldots = a_{1n} = 0$.

I neste omgang må

$$\underbrace{|a_{12}|^2}_{=0} + |a_{22}|^2 = (A^*A)_{2,2} = (AA^*)_{2,2} = |a_{22}|^2 + |a_{23}|^2 + \ldots + |a_{2n}|^2,$$

som impliserer $a_{23} = \ldots = a_{2n} = 0$.

Til slutt får vi $a_{ij} = 0 \ \forall \ i \neq j$, i.e.

A er diagonal.

Oppgave 7. La $f\colon V \longrightarrow V$ være en lineær operator på et endeligdimensjonalt indreproduktrom V over $\mathbb{C}$. Vis at

$$f \text{ er selvadjungert} \iff \langle f(\bar{v}), \bar{v}\rangle \in \mathbb{R} \text{ for hver } \bar{v} \in V.$$

Oppgave 7. La $f\colon V \longrightarrow V$ være en lineær operator på et endeligdimensjonalt indreproduktrom V over $\mathbb{C}$. Vis at

$$f \text{ er selvadjungert} \iff \langle f(\bar{v}), \bar{v}\rangle \in \mathbb{R} \text{ for hver } \bar{v} \in V.$$

Skal vise: f selvadjungert $\iff \langle f(\bar{v}), \bar{v}\rangle \in \mathbb{R} \quad \forall \quad \bar{v} \in V.$

La $\bar{v} \in V$. Observer først at

$$\begin{aligned}
\langle f(\bar{v}), \bar{v}\rangle - \overline{\langle f(\bar{v}), \bar{v}\rangle} &= \langle f(\bar{v}), \bar{v}\rangle - \langle \bar{v}, f(\bar{v})\rangle \\
&= \langle f(\bar{v}), \bar{v}\rangle - \langle f^*(\bar{v}), \bar{v}\rangle \\
&= \langle (f - f^*)(\bar{v}), \bar{v}\rangle.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$: Anta at $f = f^*$. Da blir $\langle f(\bar{v}), \bar{v}\rangle = \overline{\langle f(\bar{v}), \bar{v}\rangle}$, i.e. $\langle f(\bar{v}), \bar{v}\rangle \in \mathbb{R} \quad \forall \quad \bar{v} \in V.$

$\Leftarrow$: Hvis $\langle f(\bar{v}), \bar{v}\rangle \in \mathbb{R}$ så blir $\langle (f - f^*)(\bar{v}), \bar{v}\rangle = 0 \quad \forall \bar{v} \in V$, så $(f - f^*)(\bar{v}) = \bar{0} \quad \forall \bar{v} \in V$, i.e. $f = f^*$.

Oppgave 9. La f være en normal lineær operator på et endeligdimensjonalt indreproduktrom.

Vis at $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^*$.

Oppgave 9. La f være en normal lineær operator på et endeligdimensjonalt indreproduktrom.

Vis at $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^*$.

La $f: V \to V$ være normal.

Skal vise: $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^*$

5.22.17

Tilstrekkelig: $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^*$ (Da blir $\operatorname{Im} f^* = (\operatorname{Ker} f)^\perp = (\operatorname{Ker} f^*)^\perp = \operatorname{Im} f$)

Så la $\bar{v} \in V$. Da er

$$\bar{v} \in \operatorname{Ker} f \iff f(\bar{v}) = \bar{0}$$
$$\iff \|f(\bar{v})\| = 0$$

LEMMA II
FORELESNING 23VB

$$\iff \|f^*(\bar{v})\| = 0$$
$$\iff f^*(\bar{v}) = \bar{0} \iff \bar{v} \in \operatorname{Ker} f^*,$$

og dette betyr at $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^*$.

Oppgave 10. La f være en lineær operator på $\mathbb{C}^3$ med euklidsk indreprodukt. Anta at f er normal og at

$$f(1,\, 1,\, 1) = (2,\, 2,\, 2).$$

Vis at hvis $(z_1,\, z_2,\, z_3) \in \operatorname{Ker} f$, så er $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Oppgave 10. La f være en lineær operator på $\mathbb{C}^3$ med euklidsk indreprodukt. Anta at f er normal og at

$$f(1,\,1,\,1) = (2,\,2,\,2).$$

Vis at hvis $(z_1,\,z_2,\,z_3) \in \mathsf{Ker}\, f$, så er $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

La $f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ være normal og anta at

$$f(1,1,1) \overset{(*)}{=} (2,2,2)$$

La $(z_1, z_2, z_3) \in \mathrm{Ker}\, f$. Ved S23.9 er da også $(z_1, z_2, z_3) \overset{(**)}{\in} \mathrm{Ker}\, f^*$. Nå får vi

$$\begin{aligned}
2(z_1 + z_2 + z_3) &= \langle (2,2,2), (z_1, z_2, z_3) \rangle \\
&\overset{(*)}{=} \langle f(1,1,1), (z_1, z_2, z_3) \rangle \\
&= \langle (1,1,1), f^*(z_1, z_2, z_3) \rangle \\
&\overset{(**)}{=} \langle (1,1,1), (0,0,0) \rangle = 0,
\end{aligned}$$

og dette betyr at $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.