Oppgave 2. I denne oppgaven ser vi på funksjonen $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = x.$$

(a) Finn de tallene $a, b \in \mathbb{R}$ som er slik at funksjonen

$$\phi(x) = a + be^x$$

blir den beste tilnærminga til f, i den forstand at avviket

$$\int_0^1 |f(x) - \phi(x)|^2 \mathsf{d}x$$

blir så lite som mulig.

(b) Hvor stort er avviket i (a)?

Oppgave 2. I denne oppgaven ser vi på funksjonen $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = x.$$

(a) Finn de tallene $a, b \in \mathbb{R}$ som er slik at funksjonen

$$\phi(x) = a + be^x$$

blir den beste tilnærminga til f, i den forstand at avviket

$$\int_0^1 |f(x) - \phi(x)|^2 \mathrm{d}x$$

blir så lite som mulig.

(b) Hvor stort er avviket i (a)?

a) La V være indreproduktrommet av alle kontinuerlige funksjoner $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ med

$$\langle h, g \rangle = \int_0^1 h(x) g(x)\, dx \qquad \forall \quad h, g \in V.$$

La $f \in V$ være gitt ved $f(x) = x \quad \forall \quad x \in [0,1]$

Skal finne: Den funksjonen $\phi \in V$ på formen

$\phi(x) = a + be^x$ med $a, b \in \mathbb{R}$

som minimerer

$$\int_0^1 |f(x) - \phi(x)|^2\, dx.$$

Oppgave 2. I denne oppgaven ser vi på funksjonen $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = x.$$

(a) Finn de tallene $a, b \in \mathbb{R}$ som er slik at funksjonen

$$\phi(x) = a + be^x$$

blir den beste tilnærminga til f, i den forstand at avviket

$$\int_0^1 |f(x) - \phi(x)|^2 \mathrm{d}x$$

blir så lite som mulig.

(b) Hvor stort er avviket i (a)?

a) La $U = \operatorname{span}(1, e^x) \subset V$. Den funksjonen ϕ som vi søker, er den ortogonale projeksjonen $P_U(f(x))$! For å regne ut $P_U(f(x))$ trenger vi en ortonormal basis for U, og det får vi ved å gjøre Gram-Schmidt på basisen $\{1, e^x\}$ for U. Resultatet er

$$\bar{e}_1 = 1 \quad ; \quad \bar{e}_2 = \frac{e^x - e + 1}{\sqrt{\frac{1}{2}(e-1)(3-e)}} .$$

Oppgave 2. I denne oppgaven ser vi på funksjonen $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = x.$$

(a) Finn de tallene $a, b \in \mathbb{R}$ som er slik at funksjonen

$$\phi(x) = a + be^x$$

blir den beste tilnærminga til f, i den forstand at avviket

$$\int_0^1 |f(x) - \phi(x)|^2 \mathrm{d}x$$

blir så lite som mulig.

(b) Hvor stort er avviket i (a)?

a) Da blir

$$\phi(x) = P_U(f(x))$$

$$= \langle f, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \langle f, \bar{e}_2 \rangle \bar{e}_2$$

$$= \int_0^1 x \cdot 1 \, dx \cdot 1 + \int_0^1 \frac{x(e^x - e + 1)}{\sqrt{\frac{1}{2}(e-1)(3-e)}} \, dx \; \bar{e}_2$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \frac{2}{(e-1)(3-e)} \left[xe^x - e^x - \frac{x^2 e^x}{2} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 (e^x - e + 1)$$

$$= \underline{\underline{\frac{e^x}{e-1} - \frac{1}{2}}}$$

(altså $a = -\frac{1}{2}$ og $b = \frac{1}{e-1}$)

Oppgave 2. I denne oppgaven ser vi på funksjonen $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = x.$$

(a) Finn de tallene $a, b \in \mathbb{R}$ som er slik at funksjonen

$$\phi(x) = a + be^x$$

blir den beste tilnærminga til f, i den forstand at avviket

$$\int_0^1 |f(x) - \phi(x)|^2 \mathrm{d}x$$

blir så lite som mulig.

(b) Hvor stort er avviket i (a)?

b) Avviket i a) er

$$\int_0^1 |f(x) - \phi(x)|^2 dx = \int_0^1 \left(x - \left(\frac{e^x}{e-1} - \frac{1}{2}\right)\right)^2 dx$$

$$= \underline{\underline{\frac{7e - 19}{12e - 12}}} \approx 0{,}00136$$