Oppgave 2. Løs følgende oppgave fra eksamen i mai 2023.

Oppgave 2. I denne oppgaven ser vi på det reelle vektorrommet $\mathbb{R}^4$ med det euklidske indreproduktet. La

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og } V = \mathsf{span}\,\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} \subset \mathbb{R}^4.$$

(a) Hva er dimensjonen til underrommet V? Finn en ortonormal basis for V.

(b) Nå lar vi

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finn en vektor $\bar{v} \in V$ som er slik at tallet $||\bar{w} - \bar{v}||$ er så lite som mulig.

Oppgave 2. Løs følgende oppgave fra eksamen i mai 2023.

Oppgave 2. I denne oppgaven ser vi på det reelle vektorrommet $\mathbb{R}^4$ med det euklidske indreproduktet. La

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og } V = \mathsf{span}\,\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} \subset \mathbb{R}^4.$$

(a) Hva er dimensjonen til underrommet V? Finn en ortonormal basis for V.

(b) Nå lar vi

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finn en vektor $\bar{v} \in V$ som er slik at tallet $||\bar{w} - \bar{v}||$ er så lite som mulig.

a) Her er $\bar{v}_3 = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$, men $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ er lineært uavhengig og dermed en basis for $V = \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. Altså er $\underline{\underline{\dim V = 2}}$.

Oppgave 2. Løs følgende oppgave fra eksamen i mai 2023.

Oppgave 2. I denne oppgaven ser vi på det reelle vektorrommet $\mathbb{R}^4$ med det euklidske indreproduktet. La

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \bar{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ og } V = \mathsf{span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} \subset \mathbb{R}^4.$$

(a) Hva er dimensjonen til underrommet V? Finn en ortonormal basis for V.

(b) Nå lar vi

$$\bar{w} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Finn en vektor $\bar{v} \in V$ som er slik at tallet $||\bar{w} - \bar{v}||$ er så lite som mulig.

a) Vi finner en ortonormal basis for V ved å gjøre Gram – Schmidt- prosessen på $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$:

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\bar{e}_2 = \frac{\bar{v}_2 - \langle \bar{v}_2, \bar{e}_1\rangle \bar{e}_1}{\|\bar{v}_2 - \langle \bar{v}_2, \bar{e}_1\rangle \bar{e}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\1\end{pmatrix}$$

Altså, $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ er en ortonormal basis for V.

Oppgave 2. Løs følgende oppgave fra eksamen i mai 2023.

Oppgave 2. I denne oppgaven ser vi på det reelle vektorrommet $\mathbb{R}^4$ med det euklidske indreproduktet. La

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\ \bar{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ \bar{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ og } V = \mathsf{span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} \subset \mathbb{R}^4.$$

(a) Hva er dimensjonen til underrommet V? Finn en ortonormal basis for V.

(b) Nå lar vi

$$\bar{w} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Finn en vektor $\bar{v} \in V$ som er slik at tallet $||\bar{w} - \bar{v}||$ er så lite som mulig.

b) Den vektoren $\bar{v}$ som vi er ute etter, er den ortogonale projeksjonen $P_V(\bar{w})$ av $\bar{w}$ på V (husk TEOREM fra FORELESNING E20).
Siden $\{\bar{e}_1, e_2\}$ fra a) er en ortonormal basis for V, kan vi bruke formelen fra FORELESNING E20:

$$\bar{v} = P_V(\bar{w}) = \langle \bar{w}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \langle \bar{w}, \bar{e}_2 \rangle \bar{e}_2$$

$$= \sqrt{3}\,\bar{e}_1 + \frac{3}{\sqrt{15}}\bar{e}_2 = \frac{3}{5}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$$

Oppgave 4. Finn det polynomet $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ med $p(0) = 0 = p'(0)$ som gjør tallet

$$\int_0^1 |2 + 3x - p(x)|^2 dx$$

så lite som mulig.

Oppgave 4. Finn det polynomet $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ med $p(0) = 0 = p'(0)$ som gjør tallet

$$\int_0^1 |2 + 3x - p(x)|^2 dx$$

så lite som mulig.

La $U = \{ q(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \mid q(0) = 0 = q'(0) \}$. Da er U et underrom av $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ og det polynomet $p(x)$ som vi er ute etter, er

den ortogonale projeksjonen $P_U(2+3x)$

av polynomet $2+3x$ på underrommet U (dette er det TEOREM fra FORELESNING E20 som sier).

Før vi kan bruke formelen for P_U fra FORELESNING E20, trenger vi en ortonormal basis for U. En basis for U er $\{x^2, x^3\}$, og Gram-Schmidt-prosessen gir den følgende ortonormale basisen:

$$\bar{e}_1 = \sqrt{5}\, x^2 \quad , \quad \bar{e}_2 = \sqrt{7}\,(-5x^2 + 6x^3).$$

Oppgave 4. Finn det polynomet $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ med $p(0) = 0 = p'(0)$ som gjør tallet

$$\int_0^1 |2 + 3x - p(x)|^2 dx$$

så lite som mulig.

Da vet vi altså at

$$p(x) = P_U(2+3x)$$

$$= \langle 2+3x, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \langle 2+3x, \bar{e}_2 \rangle \bar{e}_2$$

$$= \dots = \underline{\underline{24x^2 - \frac{203}{10}x^3}}$$

Lett regning

Oppgave 7. La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom og la P være en lineær operator på V. Anta at $P^2 = P$ og at hver vektor i $\mathsf{Ker}\, P$ er ortogonal med hver vektor i $\mathsf{Im}\, P$.

Vis at P er en ortogonal projeksjon, altså at det finnes et underrom $U \subset V$ slik at $P = P_U$.

Oppgave 7. La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom og la P være en lineær operator på V. Anta at $P^2 = P$ og at hver vektor i $\operatorname{Ker} P$ er ortogonal med hver vektor i $\operatorname{Im} P$.

Vis at P er en ortogonal projeksjon, altså at det finnes et underrom $U \subset V$ slik at $P = P_U$.

La $U = \operatorname{Im} P$. For hver $\bar{v} \in V$ har vi:

$$\bar{v} = \underbrace{P(\bar{v})}_{\in U} + (\bar{v} - P(\bar{v})).$$

antagelsen $P = P^2$

Her er $P(\bar{v} - P(\bar{v})) = P(\bar{v}) - P^2(\bar{v}) = \bar{0}$, altså $\bar{v} - P(\bar{v}) \in \operatorname{Ker} P \subset U^{\perp}$

antagelse

Dette viser at $P(\bar{v}) = P_U(\bar{v})$, i.e. $\boxed{P = P_U}$. $\square$

Oppgave 8. La U være et endeligdimensjonalt underrom av et indreproduktrom. Vis at

$$U = (U^{\perp})^{\perp}.$$

Oppgave 8. La U være et endeligdimensjonalt underrom av et indreproduktrom. Vis at

$$U = (U^{\perp})^{\perp}.$$

$U \subset V$ er et endeligdimensjonalt underrom

Skal vise: $U = (U^{\perp})^{\perp}$

$U \subset (U^{\perp})^{\perp}$: La $\bar{u} \in U$. Da er $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0 \quad \forall \; \bar{v} \in U^{\perp}$.
Altså, $\bar{u}$ er ortogonal med hver vektor i $U^{\perp}$, altså $\bar{u} \in (U^{\perp})^{\perp}$.

Oppgave 8. La U være et endeligdimensjonalt underrom av et indreproduktrom. Vis at

$$U = (U^{\perp})^{\perp}.$$

$U \subset V$ er et endeligdimensjonalt underrom

Skal vise: $U = (U^{\perp})^{\perp}$

$(U^{\perp})^{\perp} \subset U$: La $\bar{v} \in (U^{\perp})^{\perp}$. Ifølge TEOREM (ORTOGONAL PROJEKSJON) fra FORELESNING V20 kan vi skrive

$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$ med $\bar{u} \in U$ og $\bar{w} \in U^{\perp}$.

Det gir $\bar{v} - \bar{u} = \bar{w} \in U^{\perp}$. Siden $\bar{v} \in (U^{\perp})^{\perp}$ og $\bar{u} \in (U^{\perp})^{\perp}$ (vi har allerede vist at $U \subset (U^{\perp})^{\perp}$), er også $\bar{v} - \bar{u} \in (U^{\perp})^{\perp}$. Altså har vi

$$\bar{v} - \bar{u} \in U^{\perp} \cap (U^{\perp})^{\perp},$$

som impliserer at $\bar{u} = \bar{v}$. Det betyr at $\bar{v} \in U$.