Oppgave 3. Finn et polynom $q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ som er slik at

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 p(x)q(x)\mathsf{d}x$$

for hver $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

Hint: I Oppgave 2 fant du en ortonormal basis som kan være nyttig her.

$$\left\{1,\ \sqrt{3}(-1+2x),\ \sqrt{5}(1-6x+6x^2)\right\}$$

Oppgave 3. Finn et polynom $q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ som er slik at
$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$$
for hver $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

Hint: I Oppgave 2 fant du en ortonormal basis som kan være nyttig her.

$$\left\{1,\ \sqrt{3}(-1+2x),\ \sqrt{5}(1-6x+6x^2)\right\}$$

Skal finne: $q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ slik at $p(1/2) = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx \quad \forall\ p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

God idé: Definér $\psi : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}$ ved
$$\psi(p) = p(1/2) \quad \forall\ p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$$

Merk at ψ er en lineær funksjonal. TEOREM! fra FORELESNING V19 sier at da finnes en $q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ slik at
$$p(1/2) = \psi(p) = \langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx \quad \forall\ p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2},$$

Vi VELGER å utstyre $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ med dette indreproduktet!

Polynomet q er altså akkurat det oppgaven etterspør!

Oppgave 3. Finn et polynom $q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ som er slik at

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$$

for hver $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

Hint: I Oppgave 2 fant du en ortonormal basis som kan være nyttig her.

$$\left\{1,\ \sqrt{3}(-1+2x),\ \sqrt{5}(1-6x+6x^2)\right\}$$

Beviset for dette resultatet forteller oss hvordan vi kan konstruere polynomet q, nemlig som

$$q = \psi(\bar{e}_1)\bar{e}_1 + \psi(\bar{e}_2)\bar{e}_2 + \psi(\bar{e}_3)\bar{e}_3$$

hvor $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ er en vilkårlig ortonormal basis for dette indreproduktrommet. Vi bruker den ortonormale basisen fra S19.2 a) og finner

$$q = \psi(1)\cdot 1 + \psi(\sqrt{3}(-1+2x))\sqrt{3}(-1+2x) + \psi(\sqrt{5}(1-6x+6x^2))\sqrt{5}(1-6x+6x^2)$$

$\psi(p) = p(1/2)$

$$= 1 + 0 + \sqrt{5}\left(1-3+\tfrac{3}{2}\right)\sqrt{5}(1-6x+6x^2)$$

$$= -\frac{3}{2} + 15(x-x^2)$$

Oppgave 4. La $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ være lineært uavhengig i et reelt indreproduktrom V. Vis at det finnes en $\bar{w} \in V$ som er slik at

$$\langle \bar{v}_i, \bar{w} \rangle > 0 \text{ for hver } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Oppgave 4. La $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ være lineært uavhengig i et reelt indreproduktrom V. Vis at det finnes en $\bar{w} \in V$ som er slik at

$$\langle \bar{v}_i, \bar{w} \rangle > 0 \text{ for hver } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

$\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ er lineært uavhengig i et indreproduktrom V.

Skal vise: $\exists\ \bar{w} \in V$ s.a. $\langle \bar{v}_i, \bar{w} \rangle > 0 \quad \forall\ 1 \leq i \leq n$.

La $W = \text{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n) \subset V$. Da er $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ en basis for W per antagelse. Så vi kan definere en lineær funksjonal $\phi : W \longrightarrow F$ ved regelen

$$\phi(a_1\bar{v}_1 + \ldots + a_n\bar{v}_n) = a_1 + \ldots + a_n.$$

Ved TEOREM! fra FORELESNING V19 finnes en $\bar{w} \in V$ slik at $\phi = \langle -, \bar{w} \rangle$. Spesielt får vi

$$0 < 1 = \phi(\bar{v}_i) = \langle \bar{v}_i, \bar{w} \rangle \quad \forall\ 1 \leq i \leq n.$$