Oppgave 3. Løs følgende oppgave fra eksamen i mai 2023.

Oppgave 3. I denne oppgaven ser vi på det reelle vektorrommet $\mathbb{R}^4$ med det euklidske indreproduktet. La

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } V = \mathsf{span}\,\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} \subset \mathbb{R}^4.$$

(a) Finn en ortonormal basis for V.

(b) Vektoren

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ligger i underrommet V. Skriv $\bar{v}$ som en lineærkombinasjon av vektorene i den ortonormale basisen du fant i (a).

Oppgave 3. Løs følgende oppgave fra eksamen i mai 2023.

Oppgave 3. I denne oppgaven ser vi på det reelle vektorrommet $\mathbb{R}^4$ med det euklidske indreproduktet. La

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \bar{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \text{ og } V = \mathsf{span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} \subset \mathbb{R}^4.$$

(a) Finn en ortonormal basis for V.

(b) Vektoren

$$\bar{v} = \begin{pmatrix}-5\\1\\4\\4\end{pmatrix}$$

ligger i underrommet V. Skriv $\bar{v}$ som en lineærkombinasjon av vektorene i den ortonormale basisen du fant i (a).

a) Mengden $\beta = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ er lineært uavhengig, så vi kan finne en ortonormal basis for span$(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ ved å bruke Gram–Schmidt-prosessen på β: Dette gir

$$\underline{\underline{\left\{ \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}_{=\bar{e}_1}, \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\1\end{pmatrix}}_{=\bar{e}_2}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\1\end{pmatrix}}_{=\bar{e}_3} \right\}}}.$$

Oppgave 3. Løs følgende oppgave fra eksamen i mai 2023.

Oppgave 3. I denne oppgaven ser vi på det reelle vektorrommet $\mathbb{R}^4$ med det euklidske indreproduktet. La

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \bar{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \text{ og } V = \mathsf{span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} \subset \mathbb{R}^4.$$

(a) Finn en ortonormal basis for V.

(b) Vektoren

$$\bar{v} = \begin{pmatrix}-5\\1\\4\\4\end{pmatrix}$$

ligger i underrommet V. Skriv $\bar{v}$ som en lineærkombinasjon av vektorene i den ortonormale basisen du fant i (a).

$$\left\{ \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}_{=\bar{e}_1}, \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\1\end{pmatrix}}_{=\bar{e}_2}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\1\end{pmatrix}}_{=\bar{e}_3} \right\}$$

b) Siden $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ er ortonormal, blir

$$\bar{v} = \langle \bar{v}, \bar{e}_1\rangle \bar{e}_1 + \langle \bar{v}, \bar{e}_2\rangle \bar{e}_2 + \langle \bar{v}, \bar{e}_3\rangle \bar{e}_3$$

TEOREM(!) FORELESNING fra V18

$$= \underline{\underline{2\bar{e}_1 + 4\sqrt{3}\,\bar{e}_2 + \sqrt{6}\,\bar{e}_3}}.$$

Oppgave 4. La θ være et reelt tall og se på de to delmengdene

$$\beta_1 = \{(\cos\theta, \sin\theta), (-\sin\theta, \cos\theta)\} \text{ og } \beta_2 = \{(\cos\theta, \sin\theta), (\sin\theta, -\cos\theta)\}$$

i indreproduktrommet $\mathbb{R}^2$ (med euklidsk indreprodukt).

(a) Vis at både β_1 og β_2 er ortonormale basiser for $\mathbb{R}^2$.

(b) Vis at *enhver* ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$ er på formen β_1 eller β_2.

Oppgave 4. La θ være et reelt tall og se på de to delmengdene

$$\beta_1 = \{(\cos\theta, \sin\theta),\ (-\sin\theta, \cos\theta)\} \text{ og } \beta_2 = \{(\cos\theta, \sin\theta),\ (\sin\theta, -\cos\theta)\}$$

i indreproduktrommet $\mathbb{R}^2$ (med euklidsk indreprodukt).

(a) Vis at både β_1 og β_2 er ortonormale basiser for $\mathbb{R}^2$.

(b) Vis at *enhver* ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$ er på formen β_1 eller β_2.

a) Dette er klart.

Det er nok å sjekke at β_1 og β_2 er ortonormale mengder.

Vi sjekker β_1:

$$\langle (\cos\theta, \sin\theta), (\cos\theta, \sin\theta) \rangle = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\langle (-\sin\theta, \cos\theta), (-\sin\theta, \cos\theta) \rangle = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\langle (\cos\theta, \sin\theta), (-\sin\theta, \cos\theta) \rangle = -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta = 0$$

Oppgave 4. La θ være et reelt tall og se på de to delmengdene

$$\beta_1 = \{(\cos\theta, \sin\theta), (-\sin\theta, \cos\theta)\} \text{ og } \beta_2 = \{(\cos\theta, \sin\theta), (\sin\theta, -\cos\theta)\}$$

i indreproduktrommet $\mathbb{R}^2$ (med euklidsk indreprodukt).

(a) Vis at både β_1 og β_2 er ortonormale basiser for $\mathbb{R}^2$.

(b) Vis at *enhver* ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$ er på formen β_1 eller β_2.

b) La $\beta = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ være en ortonormal basis.

Skal vise: Det finnes en $\theta \in \mathbb{R}$ slik at

$$\beta = \{(\cos\theta, \sin\theta)\ (-\sin\theta, \cos\theta)\}$$

eller

$$\beta = \{(\cos\theta, \sin\theta)\ (\sin\theta, -\cos\theta)\}$$

Siden $\|\bar{e}_1\| = \|\bar{e}_2\| = 1$ ligger $\bar{e}_1$ og $\bar{e}_2$ på enhetssirkelen i $\mathbb{R}^2$. Det betyr at det finnes $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi\rangle$ slik at

$$\bar{e}_1 = (\cos\theta_1, \sin\theta_1) \quad \text{og} \quad \bar{e}_2 = (\cos\theta_2, \sin\theta_2)$$

Oppgave 4. La θ være et reelt tall og se på de to delmengdene

$$\beta_1 = \{(\cos\theta, \sin\theta)\,,\ (-\sin\theta, \cos\theta)\} \text{ og } \beta_2 = \{(\cos\theta, \sin\theta),\ (\sin\theta, -\cos\theta)\}$$

i indreproduktrommet $\mathbb{R}^2$ (med euklidsk indreprodukt).

(a) Vis at både β_1 og β_2 er ortonormale basiser for $\mathbb{R}^2$.

(b) Vis at *enhver* ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$ er på formen β_1 eller β_2.

b) Kravet $\langle \bar{e}_1 , \bar{e}_2 \rangle = 0$ betyr

$$0 = \langle (\cos\theta_1 , \sin\theta_1), (\cos\theta_1 , \sin\theta_1) \rangle$$

$$= \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2),$$

som impliserer

$$\theta_2 = \theta_1 \pm \frac{\pi}{2}.$$

Disse to mulighetene gir

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \bar{e}_2 = (-\sin\theta_1 , \cos\theta_1)$$

$$\theta_2 = \theta_1 - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \bar{e}_2 = (\sin\theta_1 , -\cos\theta_1),$$

som var det vi skulle vise (med $\theta = \theta_1$). $\square$

Oppgave 6. La V være et indreproduktrom over F. For $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ og $c \in F$, vis at

[redacted]

(b) $\langle \bar{u}, \bar{v} + \bar{w} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle$;

b) $\langle \bar{u}, \bar{v} + \bar{w} \rangle \overset{v)}{=} \overline{\langle \bar{v} + \bar{w}, \bar{u} \rangle}$

$\overset{iii)}{=} \overline{\langle \bar{v}, \bar{u} \rangle + \langle \bar{w}, \bar{u} \rangle}$

$= \overline{\langle \bar{v}, \bar{u} \rangle} + \overline{\langle \bar{w}, \bar{u} \rangle} \overset{v)}{=} \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle.$

Oppgave 7. La V være et indreproduktrom over F. For $\bar{v} \in V$ og $c \in F$, vis at

[redacted]

(b) $||c\bar{v}|| = |c|||\bar{v}||$.

b) Det holder å observere at

$$\|c\bar{v}\|^2 \overset{\text{DEF}}{=} \langle c\bar{v}, c\bar{v}\rangle \overset{\text{iv)}}{=} c\langle \bar{v}, c\bar{v}\rangle \overset{\text{S18.6 c)}}{=} c\bar{c}\langle \bar{v}, \bar{v}\rangle = |c|^2\langle \bar{v}, \bar{v}\rangle \overset{\text{DEF}}{=} |c|^2\|\bar{v}\|^2.$$