**Oppgave 2.** I denne oppgaven jobber vi i $\mathbb{R}^3$ med vektorene

$$\bar{u} = (2,\ 4,\ -1) \text{ og } \bar{v} = (1,\ 1,\ 1).$$

(a) La $\mathbb{R}^3$ ha det euklidske indreproduktet. Finn $c \in \mathbb{R}$ og $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$ slik at

$$\bar{u} = c\bar{v} + \bar{w} \text{ og } \bar{w} \text{ er ortogonal med } \bar{v}.$$

Her er $\bar{u} = (2,4,-1)$ og $\bar{v} = (1,1,1)$.

a) Vi bruker PROPOSISJON (ORTOGONAL DEKOMPONERING) fra FORELESNING E17: La

$$c = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{v}\|^2} = \frac{\langle (2,4,-1), (1,1,1) \rangle}{\langle (1,1,1), (1,1,1) \rangle} = \frac{2+4-1}{1+1+1} = \frac{5}{3}.$$

Da får vi den ønskede dekomponeringa ved å la

$$\bar{w} = \bar{u} - c\bar{v} = (2,4,-1) - \frac{5}{3}(1,1,1) = \frac{1}{3}(1,\ 7,\ -8),$$

altså

$$\underline{\underline{\bar{u} = c\bar{v} + \bar{w} = \overbrace{\frac{5}{3}(1,1,1)}^{c\bar{v}} + \overbrace{\frac{1}{3}(1,\ 7,\ -8)}^{\text{ortogonal med } \bar{v}}.}}$$

**Oppgave 3.** Husk at et *indreprodukt* på et $F$-vektorrom $V$ er en funksjon

$$\langle -, - \rangle \colon V \times V \longrightarrow F$$

som tilfredsstiller følgende aksiomer for $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ og $c \in F$.

i) $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \in \mathbb{R}$ og $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \geq 0$;

ii) $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0 \iff \bar{v} = \bar{0}$;

iii) $\langle \bar{u} + \bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$;

iv) $\langle c\bar{u}, \bar{v} \rangle = c\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$;

v) $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \overline{\langle \bar{v}, \bar{u} \rangle}$.

I hvert av de følgende tilfellene, er den gitte funksjonen $\langle -, - \rangle \colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ et indreprodukt på det reelle vektorrommet $V$?

(a) $V = \mathbb{R}^3$ og $\langle -, - \rangle$ gitt ved

$$\langle (x_1,\, x_2,\, x_3),\; (y_1,\, y_2,\, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_3 y_3;$$

**Oppgave 3.** Husk at et *indreprodukt* på et $F$-vektorrom $V$ er en funksjon

$$\langle -,- \rangle \colon V \times V \longrightarrow F$$

som tilfredsstiller følgende aksiomer for $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ og $c \in F$.

i) $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \in \mathbb{R}$ og $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \geq 0$;

ii) $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0 \iff \bar{v} = \bar{0}$;

iii) $\langle \bar{u} + \bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$;

iv) $\langle c\bar{u}, \bar{v} \rangle = c \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$;

v) $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \overline{\langle \bar{v}, \bar{u} \rangle}$.

I hvert av de følgende tilfellene, er den gitte funksjonen $\langle -,- \rangle \colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ et indreprodukt på det reelle vektorrommet $V$?

(a) $V = \mathbb{R}^3$ og $\langle -,- \rangle$ gitt ved

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_3 y_3;$$

a) Dette er ikke et indreprodukt: For eksempel har vi en ikke-null vektor $\bar{v} = (0,1,0)$ med $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0$, så aksiom ii) holder ikke.

**Oppgave 4.** La $V$ være et indreproduktrom med $\bar{u}, \bar{v} \in V$.

(a) Vis *Cauchy–Schwartz-ulikheten*, som sier at

$$|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle| \leq ||\bar{u}|| \cdot ||\bar{v}||.$$

(b) Vis *trekantulikheten*, som sier at

$$||\bar{u} + \bar{v}|| \leq ||\bar{u}|| + ||\bar{v}||.$$

**Oppgave 4.** La $V$ være et indreproduktrom med $\bar{u}, \bar{v} \in V$.

(a) Vis *Cauchy–Schwartz-ulikheten*, som sier at
$$|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle| \leq ||\bar{u}|| \cdot ||\bar{v}||.$$

(b) Vis *trekantulikheten*, som sier at
$$||\bar{u} + \bar{v}|| \leq ||\bar{u}|| + ||\bar{v}||.$$

a) Skal vise: $|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle| \overset{(*)}{\leq} \|\bar{u}\| \, \|\bar{v}\|$

Hvis $\bar{v} = \bar{0}$, så holder $(*)$ opplagt $(0 \leq 0)$.

Så anta at $\bar{v} \neq \bar{0}$. Da har vi en ORTOGONAL DEKOMPONERING (FORELESNING E17), nemlig
$$\bar{u} \overset{(*)}{=} \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{v}\|^2} \bar{v} + \bar{w}$$

med $\langle \bar{w}, \bar{v} \rangle \overset{(**)}{=} 0$.

**Oppgave 4.** La $V$ være et indreproduktrom med $\bar{u}, \bar{v} \in V$.

(a) Vis *Cauchy–Schwartz-ulikheten*, som sier at
$$|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle| \leq ||\bar{u}|| \cdot ||\bar{v}||.$$

(b) Vis *trekantulikheten*, som sier at
$$||\bar{u} + \bar{v}|| \leq ||\bar{u}|| + ||\bar{v}||.$$

a) Nå følger det at

$$||\bar{u}||^2 \overset{(*)}{=} \left\| \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{||\bar{v}||^2} \bar{v} + \bar{w} \right\|^2$$

PYTHAGORAS (FORELESNING V17)

$$\overset{(**)}{=} \left\| \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{||\bar{v}||^2} \bar{v} \right\|^2 + ||\bar{w}||^2$$

$$= \frac{|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle|^2}{||\bar{v}||^2} + ||\bar{w}||^2 \geq \frac{|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle|^2}{||\bar{v}||^2}.$$

Dette betyr at $|\langle \bar{u} \ \bar{v} \rangle| \overset{(*)}{\leq} ||\bar{u}|| \, ||\bar{v}||.$ $\square$

**Oppgave 4.** La $V$ være et indreproduktrom med $\bar{u}, \bar{v} \in V$.

(a) Vis *Cauchy–Schwartz-ulikheten*, som sier at

$$|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle| \leq ||\bar{u}|| \cdot ||\bar{v}||.$$

(b) Vis *trekantulikheten*, som sier at

$$||\bar{u} + \bar{v}|| \leq ||\bar{u}|| + ||\bar{v}||.$$

b) Skal vise: $\|\bar{u} + \bar{v}\| \overset{(**)}{\leq} \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$

Vi regner rett ut:

$$\begin{aligned}
\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 &= \langle \bar{u} + \bar{v}, \bar{u} + \bar{v} \rangle \\
&\overset{\text{Aksiomer og fundamentale egenskaper}}{=} \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle + \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle \\
&\overset{\text{Aksiom v)}}{=} \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle + \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \overline{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle} \quad \text{Konjugering i } \mathbb{C} \\
&= \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 + 2\underbrace{\mathrm{Re}(\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle)}_{\text{Realdelen til det komplekse tallet } \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle} \\
&\leq \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 + 2|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle| \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwartz (S17.4 a)}}{\leq} \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 + 2\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\| \\
&= (\|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|)^2,
\end{aligned}$$

og dette betyr at $\|\bar{u} + \bar{v}\| \overset{(**)}{\leq} \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$. $\square$