Oppgave 1. Løs Oppgave 1 fra eksamen i august 2023:

Oppgave 1. I denne oppgaven ser vi på matrisa

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Finn ei inverterbar matrise P som er slik at $P^{-1}AP$ er diagonal.

(b) Finn en generell løsning av følgende system av differensialligninger.

$$\begin{array}{rcrcr} y_1'(t) & = & 2y_1(t) & - & y_2(t) \\ y_2'(t) & = & -y_1(t) & + & 2y_2(2) \end{array}$$

Oppgave 1. Løs Oppgave 1 fra eksamen i august 2023:

> **Oppgave 1.** I denne oppgaven ser vi på matrisa
> $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
> (a) Finn ei inverterbar matrise P som er slik at $P^{-1}AP$ er diagonal.
>
> (b) Finn en generell løsning av følgende system av differensiallikninger.
> $$\begin{aligned} y_1'(t) &= 2y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) &= -y_1(t) + 2y_2(2) \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $$\text{charpol}_A = \det(A - x \cdot I_{2\times2}) = \det\begin{pmatrix} 2-x & -1 \\ -1 & 2-x \end{pmatrix} = (2-x)^2 - 1$$
$$= (x-1)(x-3),$$

så egenverdiene til A er 1 og 3.

Vi finner (basiser for) egenrommene:

- $A - 1 \cdot I_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1 = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
- $A - 3 \cdot I_{3\times3} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_3 = \text{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Det betyr at for $\underline{\underline{P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}}$ er $P^{-1}AP$ diagonal

Oppgave 1. Løs Oppgave 1 fra eksamen i august 2023:

Oppgave 1. I denne oppgaven ser vi på matrisa

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Finn ei inverterbar matrise P som er slik at $P^{-1}AP$ er diagonal.

(b) Finn en generell løsning av følgende system av differensialligninger.

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 2y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) &= -y_1(t) + 2y_2(2) \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Systemet vi skal løse er $A\bar{y} = \bar{y}'$ hvor

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \bar{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}.$$

Vi vet fra a) at $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =: D$. Så la

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \bar{z} = P^{-1}\bar{y}.$$

Poenget med denne substitusjonen er at vi får

$$\bar{z}' = D\bar{z},$$

altså systemet

$$\begin{aligned} z_1' &= z_1 \\ z_2' &= 3z_2, \end{aligned}$$

som har opplagt løsning: $z_1(t) = c_1 e^{t}$; $z_2(t) = c_2 e^{3t}$.

Oppgave 1. Løs Oppgave 1 fra eksamen i august 2023:

Oppgave 1. I denne oppgaven ser vi på matrisa

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Finn ei inverterbar matrise P som er slik at $P^{-1}AP$ er diagonal.

(b) Finn en generell løsning av følgende system av differensialligninger.

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 2y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) &= -y_1(t) + 2y_2(2) \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) For å løse det opprinnelige systemet finner vi

$$\bar{y} = P\bar{z},$$

altså

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

altså

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= z_1(t) - z_2(t) = c_1 e^{t} - c_2 e^{3t} \\ y_2(t) &= z_1(t) + z_2(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{3t} \end{aligned}\right\} \text{GENERELL LØSNING}$$

Oppgave 3. I denne oppgaven ser vi på følgende system av differensialligninger.

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 & &+ y_3 \\ y_2' &= -2y_1 &+ y_2 & \\ y_3' &= -2y_1 & &+ y_3 \end{aligned}$$

(a) Finn en generell løsning av ligningssystemet.

(b) Finn den løsningen som tilfredsstiller $y_1(0) = -1$, $y_2(0) = 1$ og $y_3(0) = 0$.

a) Her nøyer vi oss med å oppgi fasit:

Den generelle løsningen er

$$\begin{aligned} y_1(t) &= & -c_2 e^{2t} &+ c_3 e^{3t} \\ y_2(t) &= c_1 e^{t} & + 2c_2 e^{2t} &- c_3 e^{3t} \\ y_3(t) &= & 2c_2 e^{2t} &- c_3 e^{3t}. \end{aligned}$$

Oppgave 3. I denne oppgaven ser vi på følgende system av differensialligninger.

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 &&+ y_3 \\ y_2' &= -2y_1 + y_2 && \\ y_3' &= -2y_1 &&+ y_3 \end{aligned}$$

(a) Finn en generell løsning av ligningssystemet.

(b) Finn den løsningen som tilfredsstiller $y_1(0) = -1$, $y_2(0) = 1$ og $y_3(0) = 0$.

b) Vi vet fra a) at enhver løsning er på formen

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= \quad\quad -c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} \\ y_2(t) &= c_1 e^{t} + 2c_2 e^{2t} - c_3 e^{3t} \\ y_3(t) &= \quad\quad 2c_2 e^{2t} - c_3 e^{3t} \end{aligned}\right\} (*)$$

Hvis vi krever $y_1(0) = -1$, $y_2(0) = 1$ og $y_3(0) = 0$, så blir $(*)$ til systemet

$$\begin{aligned} -1 &= \quad\quad -c_2 + c_3 \\ 1 &= c_1 + 2c_2 - c_3 \\ 0 &= \quad\quad 2c_2 - c_3 \end{aligned}.$$

Oppgave 3. I denne oppgaven ser vi på følgende system av differensialligninger.

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 & &+ y_3 \\ y_2' &= -2y_1 &+ y_2 & \\ y_3' &= -2y_1 & &+ y_3 \end{aligned}$$

(a) Finn en generell løsning av ligningssystemet.

(b) Finn den løsningen som tilfredsstiller $y_1(0) = -1$, $y_2(0) = 1$ og $y_3(0) = 0$.

Dette impliserer $c_1 = 1$, $c_2 = -1$ og $c_3 = -2$, så den løsningen vi var ute etter er

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{2t} - 2e^{3t} \\ y_2(t) &= e^{t} - 2e^{2t} + 2e^{3t} \\ y_3(t) &= -2e^{2t} + 2e^{3t} \end{aligned}$$

Oppgave 6. La

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ \ldots,\ M_i,\ \ldots$$

være en følge av reelle (eller komplekse) matriser av samme størrelse.

(a) Hva bør uttrykket $\lim_{i\to\infty} M_i = M$ bety?

La nå A være ei 3×3-matrise over $\mathbb{R}$ som er slik at

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad A\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

(b) Finn kolonnevektoren

$$\lim_{i\to\infty} A^i \bar{x}$$

hvor $\bar{x} = \begin{pmatrix}6\\7\\0\end{pmatrix}$.

Oppgave 6. La

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ \ldots,\ M_i,\ \ldots$$

være en følge av reelle (eller komplekse) matriser av samme størrelse.

(a) Hva bør uttrykket $\lim_{i\to\infty} M_i = M$ bety?

La nå A være ei 3×3-matrise over $\mathbb{R}$ som er slik at

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad A\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

(b) Finn kolonnevektoren

$$\lim_{i\to\infty} A^i \bar{x}$$

hvor $\bar{x} = \begin{pmatrix}6\\7\\0\end{pmatrix}$.

a) Uttrykket

$$\lim_{i\to\infty} M_i = M$$

betyr at M er ei matrise av samme størrelse som hver M_i og at

$$\underbrace{\lim_{i\to\infty} (M_i)_{a,b} = M_{a,b}}$$

for hver posisjon (a,b).

Dette er "vanlig" konvergens av en følge av tall!

Oppgave 6. La

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ \ldots,\ M_i,\ \ldots$$

være en følge av reelle (eller komplekse) matriser av samme størrelse.

(a) Hva bør uttrykket $\lim_{i\to\infty} M_i = M$ bety?

La nå A være ei 3×3-matrise over $\mathbb{R}$ som er slik at

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad A\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

(b) Finn kolonnevektoren

$$\lim_{i\to\infty} A^i \bar{x}$$

hvor $\bar{x} = \begin{pmatrix}6\\7\\0\end{pmatrix}$.

b) Skriv

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \bar{v}_3 = \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix}.$$

Oppgaveteksten gir altså at

$$A\bar{v}_1 = \bar{v}_1, \quad A\bar{v}_2 = \frac{1}{2}\cdot\bar{v}_2 \quad \text{og} \quad A\bar{v}_3 = \frac{1}{3}\cdot\bar{v}_3.$$

Oppgave 6. La
$$M_1, M_2, M_3, \ldots, M_i, \ldots$$
være en følge av reelle (eller komplekse) matriser av samme størrelse.

(a) Hva bør uttrykket $\lim_{i\to\infty} M_i = M$ bety?

La nå A være ei 3×3-matrise over $\mathbb{R}$ som er slik at
$$A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad A\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

(b) Finn kolonnevektoren
$$\lim_{i\to\infty} A^i \bar{x}$$
hvor $\bar{x} = \begin{pmatrix}6\\7\\0\end{pmatrix}$.

LØSNING 1

Observér (altså, regn ut) at $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ er lineært uavhengig i $\mathbb{R}^3$, og dermed en basis (husk PROPOSISJON II i) fra FORELESNING V4). Derfor må det finnes (entydige) $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ slik at

$$\bar{x} = c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + c_3 v_3. \quad (*)$$

En rutinemessig utregning viser at $(*)$ har løsning $c_1 = \frac{2}{3}$, $c_2 = \frac{17}{6}$, $c_3 = \frac{5}{9}$.

Altså er

$$\bar{x} = \frac{2}{3}\bar{v}_1 + \frac{17}{6}\bar{v}_2 + \frac{5}{9}\bar{v}_3.$$

Oppgave 6. La

$$M_1, M_2, M_3, \ldots, M_i, \ldots$$

være en følge av reelle (eller komplekse) matriser av samme størrelse.

(a) Hva bør uttrykket $\lim_{i\to\infty} M_i = M$ bety?

La nå A være ei 3×3-matrise over $\mathbb{R}$ som er slik at

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad A\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

(b) Finn kolonnevektoren

$$\lim_{i\to\infty} A^i \bar{x}$$

hvor $\bar{x} = \begin{pmatrix}6\\7\\0\end{pmatrix}$.

Da blir, ifølge opplysningen i oppgaveteksten,

$$A\bar{x} = A\left(\frac{2}{3}\bar{v}_1 + \frac{17}{6}\bar{v}_2 + \frac{5}{9}\bar{v}_3\right)$$

$$= \frac{2}{3}A\bar{v}_1 + \frac{17}{6}A\bar{v}_2 + \frac{5}{9}A\bar{v}_3$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 1\cdot\bar{v}_1 + \frac{17}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\bar{v}_2 + \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{3}\cdot\bar{v}_3 .$$

Hva så med $A^2\bar{x}$? Jo, på samme vis får vi

$$A^2\bar{x} = A\left(\frac{2}{3}\cdot 1\cdot\bar{v}_1 + \frac{17}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\bar{v}_2 + \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{3}\cdot\bar{v}_3\right)$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 1^2\cdot\bar{v}_1 + \frac{17}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\bar{v}_2 + \frac{5}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\bar{v}_3 ,$$

Oppgave 6. La

$$M_1, M_2, M_3, \ldots, M_i, \ldots$$

være en følge av reelle (eller komplekse) matriser av samme størrelse.

(a) Hva bør uttrykket $\lim_{i\to\infty} M_i = M$ bety?

La nå A være ei 3×3-matrise over $\mathbb{R}$ som er slik at

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad A\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

(b) Finn kolonnevektoren

$$\lim_{i\to\infty} A^i \bar{x}$$

hvor $\bar{x} = \begin{pmatrix}6\\7\\0\end{pmatrix}$.

og det er klart at

$$A^i \bar{x} = \frac{2}{3}\cdot 1^i \cdot \bar{v}_1 + \frac{17}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^i \bar{v}_2 + \frac{5}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^i \bar{v}_3 \quad \forall\ i \geq 0.$$

Det følger at

$$\underline{\underline{\lim_{i\to\infty} A^i \bar{x} = \frac{2}{3}\bar{v}_1 = \begin{pmatrix}2/3\\4/3\\2/3\end{pmatrix}}}$$

Oppgave 6. La

$$M_1, M_2, M_3, \ldots, M_i, \ldots$$

være en følge av reelle (eller komplekse) matriser av samme størrelse.

(a) Hva bør uttrykket $\lim_{i\to\infty} M_i = M$ bety?

La nå A være ei 3×3-matrise over $\mathbb{R}$ som er slik at

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad A\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

(b) Finn kolonnevektoren

$$\lim_{i\to\infty} A^i \bar{x}$$

hvor $\bar{x} = \begin{pmatrix}6\\7\\0\end{pmatrix}$.

LØSNING 2

Oppgaveteksten gir umiddelbart at 1, $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{3}$ er egenverdiene til A, og at

$$E_1 = \operatorname{span}(\bar{v}_1), \quad E_{\frac{1}{2}} = \operatorname{span}(\bar{v}_2) \quad \text{og} \quad E_{\frac{1}{3}} = \operatorname{span}(\bar{v}_3).$$

Derfor er $A = PDP^{-1}$ hvor

$$P = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 2 & 0\\1 & 0 & 6\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \frac{1}{2} & 0\\0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Oppgave 6. La

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ \ldots,\ M_i,\ \ldots$$

være en følge av reelle (eller komplekse) matriser av samme størrelse.

(a) Hva bør uttrykket $\lim_{i\to\infty} M_i = M$ bety?

La nå A være ei 3×3-matrise over $\mathbb{R}$ som er slik at

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad \text{og}\quad A\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

(b) Finn kolonnevektoren

$$\lim_{i\to\infty} A^i\bar{x}$$

hvor $\bar{x} = \begin{pmatrix}6\\7\\0\end{pmatrix}$.

Det betyr at $A^i = PD^iP^{-1}$ $\forall\ i \geq 1$, så

$$\lim_{i\to\infty} A^i\bar{x} = \lim_{i\to\infty} PD^iP^{-1}\bar{x}$$

$$= P\cdot\left(\lim_{i\to\infty} D^i\right)\cdot P^{-1}\bar{x}$$

$$= P\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot P^{-1}\bar{x} = \begin{pmatrix}2/3\\4/3\\2/3\end{pmatrix}$$

Dette har vi ikke vist!