Oppgave 2. La M være ei diagonaliserbar matrise over $\mathbb{R}$ med 0 og 1 som sine eneste egenverdier.

Finn et pent uttrykk for M^k for hver $k \geq 1$.

Siden M er diagonaliserbar finnes ei inverterbar matrise P slik at

$$P^{-1} M P = D.$$

Merk at her er D ei diagonal matrise med kun 0-ere og 1-ere på diagonalen. Det betyr at $D^k = D \;\; \forall \; k \geq 1$ (!).

Som i S14.1 får vi

$$\underline{\underline{M^k = P D^k P^{-1} = P D P^{-1} = M}} \quad \forall \quad k \geq 1.$$

EKSEMPEL:

$$M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Oppgave 3. La f være en lineær operator på et endeligdimensjonalt vektorrom V. Vis at de følgende utsagnene er ekvivalente.

(i) λ er en egenverdi for f;

(ii) den lineære operatoren $f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V$ på V er ikke injektiv;

(iii) den lineære operatoren $f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V$ på V er ikke surjektiv; og

(iv) den lineære operatoren $f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V$ på V er ikke inverterbar.

Det at (ii), (iii) og (iv) er ekvivalente, er (formodentlig) et velkjent faktum. Se eventuelt samarbeidsoppgave S6.4 for en påminnelse.

Så det holder nå å vise (i) <=> (ii). Men ligninga $f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$ er ekvivalent med ligninga

$$(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(\bar{v}) = \bar{0},$$

så også (i) <=> (ii) er klart.

Husk: I samarbeidsoppgavene S9 definerte vi *determinanten* til en lineær operator f på et endeligdimensjonalt vektorrom V som

$$\mathsf{det}(f) = \mathsf{det}([f]_\beta),$$

altså determinanten til matrisa $[f]_\beta$ hvor $\beta \subset V$ er en hvilken som helst ordna basis.

Oppgave 5. Vis at determinanten er produktet av egenverdiene.

Det vil si, la f være en lineær operator på et endeligdimensjonalt $\mathbb{C}$-vektorrom og la $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ være egenverdiene til f (her er $\lambda_i \neq \lambda_j$ når $i \neq j$). Vis at

$$\mathsf{det}(f) = \lambda_1^{m_1} \cdot \lambda_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_t^{m_t}$$

hvor m_i er den algebraiske multiplisiteten til λ_i.

Husk: I samarbeidsoppgavene S9 definerte vi *determinanten* til en lineær operator f på et endeligdimensjonalt vektorrom V som
$$\det(f) = \det([f]_\beta),$$
altså determinanten til matrisa $[f]_\beta$ hvor $\beta \subset V$ er en hvilken som helst ordna basis.

Oppgave 5. Vis at determinanten er produktet av egenverdiene.

Det vil si, la f være en lineær operator på et endeligdimensjonalt $\mathbb{C}$-vektorrom og la $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ være egenverdiene til f (her er $\lambda_i \neq \lambda_j$ når $i \neq j$). Vis at
$$\det(f) = \lambda_1^{m_1} \cdot \lambda_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_t^{m_t}$$
hvor m_i er den algebraiske multiplisiteten til λ_i.

(Egenskaper fra forelesning V11)

Skriv $\dim V = n$. Da har vi $\deg(\text{charpol}_f) = n$, altså
$$\text{charpol}_f(x) \overset{(+)}{=} \det(x \cdot \text{id}_V - f)$$
$$= x^n - c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 .$$

charpol$_f$ er "monisk" (Egenskaper fra forelesning V11)

Siden egenverdiene til f er røttene til charpol$_f$, må
$$\text{charpol}_f(x) \overset{(\times)}{=} (x-\lambda_1)^{m_1} \cdot (x-\lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_t)^{m_t} .$$

På den ene siden er nå konstantleddet c_0 gitt som
$$c_0 = \text{charpol}_f(0) \overset{(\times)}{=} (-1)^n \cdot \lambda_1^{m_1} \cdot \lambda_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_t^{m_t} . \quad (*)$$

Samtidig er
$$c_0 = \text{charpol}_f(0) \overset{(+)}{=} \det(0 \cdot \text{id}_V - f) = \det(-f) = (-1)^n \det(f). \quad (**)$$

Så $(*)$ og $(**)$ gir $\boxed{\det(f) = \lambda_1^{m_1} \cdot \lambda_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_t^{m_t}}$.